MASTER
NEGATIVE
NO. 95-82345-6

# COPYRIGHT STATEMENT

The copyright law of the United States (Title 17, United States Code) governs the making of photocopies or other reproductions of copyrighted materials including foreign works under certain conditions. In addition, the United States extends protection to foreign works by means of various international conventions, bilateral agreements, and proclamations.

Under certain conditions specified in the law, libraries and archives are authorized to furnish a photocopy or other reproduction. One of these specified conditions is that the photocopy or reproduction is not to be "used for any purpose other than private study, scholarship, or research." If a user makes a request for, or later uses, a photocopy or reproduction for purposes in excess of "fair use," that user may be liable for copyright infringement.

The Columbia University Libraries reserve the right to refuse to accept a copying order if, in its judgement, fulfillment of the order would involve violation of the copyright law.

Author:
Broggi, Ugo

Title:
Traité des assurances sur la vie avec...

Place:
Paris

Date:
1907

95-82345-6
MASTER NEGATIVE #

COLUMBIA UNIVERSITY LIBRARIES
PRESERVATION DIVISION

# BIBLIOGRAPHIC MICROFORM TARGET

ORIGINAL MATERIAL AS FILMED - EXISTING BIBLIOGRAPHIC RECORD

BUSINESS
835
B78

Broggi, Ugo, 1880-
Traité des assurances sur la vie avec développements sur le calcul des probabilités, par ... U. Broggi. Traduit de l'italien par S. Lattès ... Avec une préface de M. Achard ... Paris, A. Hermann, 1907.
xi, 306 p. 19cm.

RESTRICTIONS ON USE:

TECHNICAL MICROFORM DATA

FILM SIZE: 35mm REDUCTION RATIO: 12X IMAGE PLACEMENT: IA (IIA) IB IIB

DATE FILMED: 2-2-95 INITIALS: W.W

TRACKING # : 04191

FILMED BY PRESERVATION RESOURCES, BETHLEHEM, PA.

# BIBLIOGRAPHIC IRREGULARITIES

**MAIN ENTRY:** Broggi, Ugo

Traité des assurances sur la vie avec...

**Bibliographic Irregularities in the Original Document:**

**List all volumes and pages affected; include name of institution if filming borrowed text.**

_____ Page(s) missing/not available: _____

_____ Volume(s) missing/not available: _____

_____ Illegible and/or damaged page(s): _____

__X__ Page(s) or volume(s) misnumbered: page 161 misnumbered as 16

_____ Bound out of sequence: _____

_____ Page(s) or volume(s) filmed from copy borrowed from: _____

_____ Other: _____

TRACKING#: MSH04191

2.0 mm ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ abcdefghijklmnopqrstuvwxyz1234567890

1.5 mm ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ abcdefghijklmnopqrstuvwxyz1234567890

# PM-MGP 13"x18"
# METRIC GENERAL PURPOSE TARGET
# PHOTOGRAPHIC

200 mm

150 mm

100 mm

A4

A5

1.0 1.1 1.25 1.4 1.6 1.8 2.0 2.2 2.5 2.8 3.2 3.6 4.0

1.0 mm ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ abcdefghijklmnopqrstuvwxyz1234567890

1.5 mm ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ abcdefghijklmnopqrstuvwxyz 1234567890

2.0 mm ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ abcdefghijklmnopqrstuvwxyz 1234567890

2.5 mm ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ abcdefghijklmnopqrstuvwxyz 1234567890

**PRECISION℠ RESOLUTION TARGETS**

Century

1303 Geneva Avenue
St. Paul, MN 55119

4.5 mm ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ abcdefghijklmnopqrstuvwxyz 1234567890

3.5 mm ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ abcdefghijklmnopqrstuvwxyz1234567890

D835 B78

Columbia University
in the City of New York

LIBRARY

School of Business

# TRAITÉ

DES

# ASSURANCES SUR LA VIE

# TRAITÉ

DES

# Assurances sur la Vie

## AVEC DÉVELOPPEMENTS SUR LE CALCUL DES PROBABILITÉS

PAR

**le Professeur U. BROGGI**

*Traduit de l'Italien par*

**S. LATTÈS**

DOCTEUR ÈS SCIENCES, PROFESSEUR AU LYCÉE DE MONTPELLIER

*Avec une Préface de*

**M. ACHARD**

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

FONDEMENTS MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUES DE LA THÉORIE. — PROBLÈMES FONDAMENTAUX DE LA THÉORIE MATHÉMATIQUE DES ASSURANCES SUR LA VIE. — TECHNIQUE DES ASSURANCES SUR LA VIE. — THÉORIE DU RISQUE.

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN

LIBRAIRIE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE

6, RUE DE LA SORBONNE, 6

1907

Business
D835
B78

JAN 4 1908 Lemcke & Buechner. 1.30 C.32
OCT 7 1942 PCR

## PRÉFACE DE L'ÉDITION ITALIENNE

—

On a fait plus d'une fois cette remarque qu'une théorie des assurances pouvait être développée indépendamment de la notion de probabilité et cela est incontestable si on entend par théorie des assurances l'ensemble des problèmes qui se posent chaque jour dans la pratique, et que la pratique de chaque jour enseigne à résoudre. Cela devient moins exact dès que l'on veut justifier de quelque façon les solutions proposées et que l'on veut déterminer les limites entre lesquelles elles sont applicables.

On se propose de donner dans ce manuel une exposition succincte des principaux problèmes qui se rattachent à la détermination d'une probabilité de décès et à son introduction dans les calculs financiers : c'est l'hypothèse de l'existence d'une pareille probabilité qui donne quelque unité aux problèmes traités dans ce manuel, problème assez divers à d'autres points de vue.

Par probabilité on entendra comme d'habitude le rapport d'un certain nombre de cas, dits favorables, au nombre total des cas possibles, supposés tous également possibles. La voie suivie par M. Bohlmann, lequel définit la probabilité par un certain système d'axiomes, permettrait d'éviter la tautologie contenue implicitement dans la définition précédente. Je n'ai pas cru devoir suivre cette voie : mais il n'est peut-être pas inutile d'appeler sur elle l'attention du lecteur.

Il ne me reste qu'à prier le lecteur de se reporter à

414778

l'*Encyklopädie der math. Wissenchaften*, vol. I, pour une bibliographie plus complète des théories indiquées ou développées dans ce manuel. Je citerai en particulier les articles de M. Czuber sur le calcul des probabilités, de M. Bauschinger sur la théorie des erreurs, de M. von Bortkiewicz sur la statistique, de M. Bohlmann sur la théorie mathématique des assurances sur la vie.

Je dois aussi rappeler, parmi les publications postérieures aux articles précédents et qui, par suite, ne s'y trouvent pas analysées, le traité de M. Czuber, *die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Ihre Anwendung*, Leipzig, 1903, livre que nous aurons l'occasion de citer bien souvent ; le traité de M. Herz, *Wahrscheinlichkeits-und Ausgleichungsrechnung*. Leipzig, 1900 ; le livre récent fort remarquable de M. Bruns, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre*, Leipzig, 1906 ; le *Abh. zur Theorie der Bev.-u-Moralstatistik* de M. Lexis, Iena, 1903 ; *le Versicherungsmathematik* de M. Grossmann, Leipzig, 1902 ; le petit traité élémentaire et fort clair de M. Löwy, *Versicherungsmath.*, Leipzig, 1903. Pour l'application des méthodes graphiques, nous citerons : Poussin, *Sur l'application des méthodes graphiques aux calculs d'assurances*, Paris, 1904.

Qu'il me soit permis enfin de remercier ici M. Bohlmann, qui a eu la courtoisie de mettre à ma disposition les notes d'un cours sur la théorie du risque, qu'il a fait à Gottingue pendant le semestre d'hiver 1899-1900. Je me suis servi plus particulièrement de ces notes pour le § V du Chap. II de la première partie et pour le n° 14 du Chap. II de la deuxième partie.

*Décembre 1905.* U. Broggi.

---

# PRÉFACE DE M. ACHARD

—

Le traité sur la *Théorie des Assurances*, publié par M. le Prof. U. Broggi, a été traduit de l'italien par M. Lattès.

L'objet principal de l'ouvrage est la théorie des assurances sur la vie, avec des développements étendus sur le calcul des probabilités. Il contient notamment des notions sur la statistique et l'établissement des tables de mortalité, le calcul des primes d'assurance et des réserves, les systèmes de participation des assurés dans les bénéfices, la théorie du risque.

Ces divers sujets sont exposés d'une manière claire et méthodique; les définitions et les démonstrations sont présentées avec autant de rigueur que le comporte cet ordre de questions. Le texte est accompagné de notes explicatives et de nombreuses références bibliographiques.

Ce traité étant très complet sous une forme condensée, nous n'en ferons pas une analyse détaillée ; mais nous signalerons de préférence les questions qui n'ont pas été traitées dans les ouvrages français d'une manière aussi systématique.

On a souvent remarqué, ainsi que le fait observer M. Broggi, qu'il est possible de construire une théorie des assurances indépendamment de l'idée de probabilité. La

statistique, et les résultats moyens qu'elle fournit aisément, constituent pour la pratique des données suffisantes. Mais le calcul des probabilités devient indispensable, lorsque l'on veut se rendre compte de l'importance des écarts qui peuvent se produire entre les moyennes provenant des données primitives, et les résultats effectifs des observations. Ces questions n'ont pas toujours préoccupé au même degré les auteurs qui ont écrit sur les tarifs d'assurances et sur les réserves; nous reconnaissons que M. Broggi leur a accordé une grande place dans son ouvrage, et nous en dirons quelques mots.

Nous considérerons d'abord le Théorème de Bernoulli, au sujet duquel on peut distinguer deux points de vue : d'abord la démonstration du théorème ; en second lieu, l'évaluation de la probabilité relative à des limites fixées pour l'écart entre la probabilité expérimentale et la probabilité théorique. La plupart des auteurs fondent la démonstration du théorème sur le calcul approché de cette probabilité; une telle marche, bien que naturelle, offre l'inconvénient d'être souvent peu exacte, le résultat final ne pouvant que très difficilement être obtenu avec un degré d'approximation déterminé.

Une autre méthode de démonstration consiste à utiliser le théorème *dit* de Tchébycheff, relatif aux écarts moyens quadratiques : on arrive ainsi rapidement à une conclusion rigoureuse. C'est à ce procédé que s'arrête M. Broggi. — J'ajouterai que le théorème, attribué généralement à Tchébycheff, a été donné en premier lieu par un mathématicien français, M. Bienaimé.

Une marche tout à fait analogue s'applique à la démonstration du théorème de Poisson, connu sous le nom de *loi des grands nombres*, dans lequel on considère les écarts par rapport à la moyenne d'une série de probabilités inégales.



M. Broggi procède aussi, comme il est d'usage, à une évaluation sommaire de la probabilité des écarts dans le théorème de Bernoulli, d'où une deuxième démonstration de cette proposition.

L'auteur établit, par les considérations connues, la loi de Gauss sur la probabilité des erreurs, et rattache à cette loi la justification de la méthode des moindres carrés.

Le calcul de la probabilité dans le théorème de Bernoulli donne un moyen de vérifier les hypothèses nécessaires à l'existence et à l'emploi des tables de mortalité. On doit supposer, en effet, que les probabilités de vie sont fixes et déterminées pour chaque âge donné et chaque intervalle de temps, et que les événements régis par ces probabilités n'ont entre eux aucune dépendance. En fractionnant une statistique établie d'après ces hypothèses, on pourra reconnaître si les écarts effectivement constatés sont différents de ceux que fait prévoir la théorie.

Nous rappellerons que Dormoy avait institué une comparaison de ce genre; il avait donné le nom de *coefficient de divergence* au rapport de l'écart expérimental à l'écart théorique, en employant à cet effet l'écart moyen arithmétique (écart moyen en valeur absolue, appelé quelquefois écart probable).

M. Broggi, en traitant le même problème sous le nom de *théorie de la dispersion*, a utilisé les écarts moyens quadratiques. Les résultats de son analyse sont intéressants;

ils tendent à confirmer assez généralement les hypothèses adoptées quant aux probabilités de la vie humaine.

L'application de la théorie des écarts à des groupes d'assurances donne lieu à la *théorie du risque* qui est exposée dans la dernière partie de l'ouvrage. Les questions qui relèvent de cette théorie présentent une sérieuse utilité pratique : par exemple, l'avantage qu'il peut y avoir à réunir ensemble des groupes d'assurances égales ou inégales ; — l'opportunité de modifier le montant maximum (ou *plein*) de l'assurance à accepter sur un assuré pris isolément.

Nous citerons à ce propos un résultat curieux, qui peut être formulé sommairement de la manière suivante : Si, à un premier groupe de personnes, toutes assurées dans les mêmes conditions pour un capital égal, on adjoint un autre groupe d'assurés analogues dont le capital individuel ne soit pas supérieur au double du premier, l'écart *relatif* à craindre (c'est-à-dire rapporté au capital total) sera moindre dans le groupe composé que dans le premier groupe, quel que soit d'ailleurs le rapport du nombre des deux groupes.

Ce chapitre se termine par des considérations sur la *théorie de la stabilité*, se rapportant à l'ensemble des opérations d'une compagnie d'assurances. On voit que les questions dont traite la *théorie du risque* sont, quant au fond, les mêmes que celles qu'a exposées M. H. Laurent dans sa *théorie du plein*.

La *théorie de la mortalité* présente des parties intéressantes, en particulier celles qui sont consacrées à l'ajustement des tables de survie. Le procédé de Woolhouse y



est expliqué ainsi que la formule de Karup, et d'autres analogues, parmi lesquelles nous indiquerons, pour son originalité, la méthode de Higham.

La partie intitulée *rentes viagères* renferme de nombreux détails sur les annuités : l'annuité fractionnée ou continue est calculée par la méthode de Woolhouse, au moyen de la formule de sommation d'Euler ; nous signalerons encore l'évaluation de l'annuité viagère dans le cas de la formule de Makeham.

En résumé, l'auteur du *Traité des Assurances sur la vie* fait preuve d'une grande compétence dans les questions qu'il traite, et d'une vaste information. Nous ajouterons que l'élégance de la traduction, le soin apporté à l'exécution matérielle, font de son livre un ouvrage attrayant, qui sera utilement consulté par tous les actuaires.

MARC ACHARD.

---

# INTRODUCTION

## PROBLÈME FONDAMENTAL

**1.** — Supposons une loi quelconque d'élimination, opérant sur une collectivité $\Gamma$ d'individus et agissant d'une façon *presque* constante. Supposons en outre les individus parfaitement semblables, en ce sens que la loi d'élimination supposée ne varierait pas si l'on substituait l'un quelconque de ces individus à tous les autres ou à certains d'entre eux.

Ayant précisé une période de temps unitaire et choisi dans $\Gamma$ un groupe $(r)$ de $r$ composants $(1 \leqslant r)$, nous pouvons concevoir un assureur tenu, vis-à-vis du groupe, à autant de payements de montants :

$$c_1(m),\ c_2(m), \ldots\ldots\ c_j(m) \geqslant 0,\ (j = 1, 2 \ldots)$$

à la fin de chaque période $m^e$, et le groupe tenu à l'égard de l'assureur à autant de payements de montants :

$$\pi_1(m),\ \pi_2(m), \ldots\ldots\ \pi_j(m) \geqslant 0,\ (j = 1, 2 \ldots)$$

au commencement de chaque période $m^e$, qu'il y a d'états possibles pour le groupe $(r)$ aux moments des payements. Et ceci jusqu'à l'extinction du groupe.

En posant, par exemple, $r = 2$, nous pouvons concevoir que les $\pi$ et les $c$ soient subordonnés à l'une des éventualités suivantes : au commencement ou à la fin de la $m^e$ période les deux composants survivent — ou bien un quelconque d'entre eux survit — ou encore l'un d'entre eux, déterminé, qui peut être l'un ou l'autre des composants, survit — ou enfin aucun des deux n'est survivant.

**2.** — Supposons toutes les valeurs $c$ et $\pi$ rapportées à un instant unique, les $c$ déterminés arbitrairement, et supposons qu'il existe un rapport fonctionnel entre les $\pi$ : il s'agit de déterminer ces derniers de telle façon que le montant des engagements de l'assureur et le montant des engagements du groupe soient égaux, en tenant compte du fait que seuls certains des payements auront lieu, à l'exclusion de certains autres.

On a des assurances sur une ou plusieurs têtes suivant que l'on a : $r = 1$ ou $r > 1$.

Pour que le problème soit déterminé, il est nécessaire de définir la relation existant entre deux sommes d'égale valeur, mais payables à des moments différents, et de préciser le caractère de la loi d'élimination supposée au début.

**3. La loi de capitalisation.** — Représentons respectivement par $dC$ et par $i\,dt$ les accroissements du capital C et du capital unité pendant l'intervalle de temps infiniment petit $dt$, $i$ et C étant supposés fonctions du temps. On a :

$$C + dC = C(1 + i\,dt)$$

d'où :

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dC}{C} = i\,dt \\ C = C_0 e^{\int i\,dt} \end{cases}$$



$C_0$ étant la constante d'intégration, déterminée par le capital initial, et $e$ la base des logarithmes népériens.

L'équation (1) devient, en supposant $i$ constant :

$$(2) \qquad C = C_0 e^{it}$$

($C$ = montant du capital $C_0$ à la fin du temps $t$), d'où, en posant :

$$(3) \qquad \begin{cases} e^i - 1 = i' \\ C = C_0 (1 + i')^t \end{cases}$$

expression de C lorsque $t$ est un nombre entier, $i'$ le taux d'accroissement de l'unité de capital pendant l'unité de temps et lorsque la capitalisation s'effectue seulement à la fin de chaque période unitaire.

Nous nous en tiendrons dans la suite aux formules (2) et (3), et à celles qui en dérivent. Notons seulement ici que l'hypothèse de l'invariabilité dans le temps du taux $i$ d'intérêt, qui leur sert de base, ne pourrait être adoptée correctement que dans des calculs relatifs à des périodes de temps relativement restreintes. Pour des calculs portant sur une longue durée, au contraire, on ne pourrait peut-être pas faire abstraction de cette tendance de l'intérêt à décroître, que les recherches économiques semblent avoir démontrée [1].

**4. Degré de stabilité de la loi d'élimination de Γ.** — Le caractère de la loi d'élimination supposée au début sera

[1] Pratiquement on en tient compte en choisissant un taux d'intérêt quelque peu inférieur au taux normal au moment de l'opération. Ce choix est déterminé aussi par d'autres considérations, qui apparaîtront clairement d'elles-mêmes dans la suite.

précisé si l'on identifie le degré de stabilité propre à cette loi avec celui d'un phénomène présentant une probabilité constante [1].

Nous sommes conduits ainsi à prendre comme base d'une théorie mathématique des assurances, dérivant d'une pareille conception, des hypothèses spéciales, outre celles sur lesquelles est fondé le calcul des probabilités (et avant tout cette hypothèse qu'il existe pour chaque individu de $\Gamma$ une probabilité déterminée de vivre pendant une période de temps déterminée).

§ 2. — Admettons qu'à chaque état du groupe $(r)$ de $\Gamma$ corresponde une probabilité déterminée — que la valeur d'une somme C, subordonnée à l'arrivée d'un événement de probabilité $p$, soit exprimée par $p.\mathrm{C}$ ($p.\mathrm{C} =$ *valeur probable* ou espérance mathématique de C) — admettons enfin l'équation (3) : au problème rappelé plus haut correspond un type unique, très général, d'équation. Désignons par $p_j(m)$ la probabilité pour que le payement $c_j(m)$ s'accomplisse, par $\mathbf{p}_j(m-1)$ celle pour que le payement $\pi_j(m)$ s'accomplisse. On a, d'après ce qui précède :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_1(m)\sum_1(j)\,(1+i)^{k-m+1}\,\mathbf{p}_j(m-1)\,\pi_j(m) - \\ &-\sum(m)\sum_1(j)\,(1+i)^{k-m}\,p_j(m)\,c_j(m) = 0 \end{aligned}\right.$$

où $k$ est complètement arbitraire. L'équation (4) exprime la condition pour que les valeurs probables des engagements pris par l'assureur et par le groupe assuré, rapportées à un même instant, coïncident. A $k = 0$ correspond le cas où ces valeurs sont rapportées au moment initial de l'opération.

[1] Nous aurons l'occasion d'éclaircir, par la suite, la nature de ce phénomène.



Posons :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_2(m)\sum_1(j)\,(1+i)^{-m}\,p_j(m)\,c_j(m) - \\ &-\sum_2(m)\sum_1(j)\,(1+i)^{-m+1}\,\mathbf{p}_j(m-1)\,\pi_j(m) = \\ &\qquad = \mathrm{R}_1\,(1+i)^{-1} \\ &\sum_3(m)\sum_1(j)\,(1+i)^{-m}\,p_j(m)\,c_j(m) - \\ &-\sum_3(m)\sum_1(j)\,(1+i)^{-m}\,\mathbf{p}_j(m-1)\,\pi_j(m) = \\ &\qquad = \mathrm{R}_2\,(1+i)^{-2} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right.$$

$\mathrm{R}_1$, $\mathrm{R}_2$... s'appellent *réserves* de l'opération considérée, à la fin de la première, de la deuxième... période.

Plus généralement supposons que l'on décompose chacune des sommes :

$$\sum_0(m)\sum_1(j)\,(1+i)^{-m}\,\mathbf{p}_j(m-1)\,\pi_j(m) = \sum\nolimits_{\mathrm{I}}$$

$$\sum_0(m)\sum_1(j)\,(1+i)^{-m+1}\,p_j(m)\,c_j(m) = \sum\nolimits_{\mathrm{II}}$$

en sommes partielles $\sum_{\mathrm{I}}^1$, $\sum_{\mathrm{I}}^2$ ; $\sum_{\mathrm{II}}^1$, $\sum_{\mathrm{II}}^2$, les sommes $\sum_{\mathrm{I}}^1, \sum_{\mathrm{II}}^1$ étant étendues aux valeurs entières de $m$ de l'intervalle $(0, r)$ et $\sum_{\mathrm{I}}^2$, $\sum_{\mathrm{II}}^2$ aux valeurs $m = r+1, r+2, \dots$ L'équation (4) peut s'écrire :

$$\sum\nolimits_{\mathrm{I}}^1 + \sum\nolimits_{\mathrm{I}}^2 - \sum\nolimits_{\mathrm{II}}^1 - \sum\nolimits_{\mathrm{II}}^2 = 0.$$

Or, on a, par suite des relations (5) :

$$(6)\qquad (1+i)^r\left(\sum\nolimits_{\mathrm{II}}^2 - \sum\nolimits_{\mathrm{I}}^2\right) = \mathrm{R}_r$$

On a donc aussi :

$$(7) \qquad (1+i)^r \left(\sum\nolimits_{\mathrm{I}}^{1} - \sum\nolimits_{\mathrm{II}}^{1}\right) = \mathrm{R}_r$$

Les équations (6) et (7) définissent respectivement la *méthode prospective* et la *méthode rétrospective* de détermination des réserves.

Dans la première de ces méthodes, la réserve à la fin d'une certaine période est égalée à la différence rapportée à la fin de cette période, entre les valeurs des engagements de l'assureur et les valeurs des engagements du groupe assuré, postérieurs à l'époque de référence ; dans la deuxième, on la pose égale à la différence, rapportée au même moment, entre les valeurs réciproques des engagements du groupe assuré et de l'assureur, antérieurs à l'époque définie tout d'abord.

Si l'on suppose, dans les équations (4),

$$\pi_j(0) \neq 0 \quad \pi_j(1) = \pi_j(2) = \ldots = 0,$$

et si l'on remarque qu'au début de l'opération on ne peut considérer qu'un seul payement Π, celui qui correspond à l'état connu du groupe à ce moment (la probabilité étant, par suite, $\mathbf{p}(0) = 1$), on déduit de là :

$$\Pi = \sum_{1}(m) \sum_{1}(j)\,(1+i)^{-m}\, p_j(m)\, c_j(m).$$

Π s'appelle la *prime unique* de l'opération. Cette prime coïncide avec la réserve de l'opération elle-même, au début de la première période.

**5.** — Par réserve d'un ensemble d'opérations, on entend la somme des réserves des diverses opérations composant l'ensemble.

Si l'on désigne respectivement par [R], [$\Sigma_{\mathrm{I}}$], [$\Sigma_{\mathrm{II}}$] la somme des réserves, la somme des engagements futurs de chacun des



groupes assurés et la somme des engagements de l'assureur vis-à-vis de chacun de ces groupes, rapportés à la fin de la période $r$, l'équation :

$$[\mathrm{R}] = [\Sigma_{\mathrm{II}}] - [\Sigma_{\mathrm{I}}]$$

exprime le montant en [R] du fonds nécessaire pour que les primes encaissées et accumulées par l'assureur lui suffisent exactement pour faire face à ses engagements envers l'ensemble des assurés, si toutefois l'action effective des lois d'élimination et de capitalisation coïncide avec les lois prévues à ce sujet.

**6.** — Nous ferons abstraction ici de la loi de capitalisation, supposée certaine.

Notons, au contraire, comment le fait d'avoir attribué à la loi d'élimination le degré d'invariabilité propre à un phénomène, présentant une probabilité constante, entraîne la possibilité d'écarts entre la loi effective d'élimination et la loi prévue, et par suite la possibilité de profits ou de pertes pour l'assureur, suivant que ces oscillations lui sont favorables ou contraires.

Les équations qui ont servi de base à la définition des primes et des réserves correspondent à une première approximation : elles correspondent à l'hypothèse où les payements effectifs des deux parties contractantes s'identifient avec leur valeur probable, au sens défini par le calcul des probabilités. En fait ce calcul lui-même nous apprend la possibilité de variations auxquelles on ne peut assigner que les limites correspondant aux hypothèses extrêmes, celle où tous les individus mourraient de suite après avoir contracté l'assurance et celle où aucun d'eux ne mourrait avant d'avoir atteint un âge extrême que l'on considère comme physiquement impossible de dépasser. A chacune des hypothèses intermédiaires correspond une probabilité d'autant plus petite que la

divergence est plus grande entre cette hypothèse et l'hypothèse probable considérée tout d'abord : pratiquement on considère comme impossibles, et par suite comme ayant la probabilité zéro, des écarts auxquels correspondent des probabilités très petites et par suite négligeables.

**7.** — On peut supposer :

Que les primes fixées par l'assureur coïncident avec celles résultant d'un calcul correct de probabilités ;

Ou bien qu'elles leur soient supérieures.

C'est le second cas qui correspond à la réalité : l'assureur effectif introduit en effet, dans la détermination des primes, des erreurs systématiques qui paralysent l'action des variations accidentelles de la mortalité. De pareilles erreurs consistent, soit dans la prévision d'une loi de mortalité plus défavorable à l'assureur que celle qui paraîtrait la plus probable d'après la statistique, soit dans une évaluation pessimiste des intérêts sur les fonds placés chez lui, soit finalement dans des augmentations ou *chargements* sur les primes.

Dans le premier cas il est au contraire nécessaire de constituer des fonds spéciaux de garantie (naturellement, en outre des réserves) qui permettent de parer aux variations de la mortalité, dans l'hypothèse d'oscillations défavorables à l'assureur et coïncidant avec le maximum d'oscillation supposé pratiquement possible.

La détermination du montant de ces fonds est l'objet de la théorie du risque, qui a précisément pour objet la recherche de l'influence que les variations accidentelles de la mortalité exercent sur les conditions financières de l'institut d'assurances.

**8.** — Les versements éventuels effectués par l'assureur et par le groupe assuré peuvent être subordonnés à d'autres événements



que la mort ou la survivance des membres du groupe, ou bien à d'autres événements en même temps qu'à ces derniers : on devra tenir compte alors, non plus ou non seulement des probabilités correspondant aux états possibles du groupe à l'égard de la mortalité, mais des probabilités correspondant aux états possibles du groupe à l'égard des faits éventuels pris ici comme base de l'assurance. On a ainsi, à côté des assurances sur la vie proprement dites (auxquelles nous nous bornerons par la suite) d'autres assurances (par exemple contre l'invalidité, les maladies, etc...) qui constituent avec les premières la catégorie des assurances sur les personnes (par opposition avec les assurances sur les choses). Leur réduction à un type unique, possible au point de vue purement formel, n'a pas été tentée jusqu'ici et ne serait peut-être pas d'ailleurs très féconde.

---

# PREMIÈRE PARTIE

—

## FONDEMENTS MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUES DE LA THÉORIE

---

## CHAPITRE PREMIER

—

### ÉLÉMENTS DU CALCUL DES PROBABILITÉS

#### I. — Définitions et principes fondamentaux

**1.** — Les recherches auxquelles s'applique la détermination de probabilités mathématiques concernent l'apparition de diverses sortes de phénomènes, soumis en partie à des rapports de causalité invariables et connus de nous, et en partie, au contraire, à un ensemble variable de causes indépendantes les unes des autres dont l'action échappe à notre examen et à n'importe quelle règle. Nous appelons *hasard* un pareil ensemble agissant sans loi et *événements* les divers états du phénomène, qui dépendent du hasard.

Supposons maintenant que, pour un phénomène déterminé, on puisse diviser l'ensemble des divers états possibles du phénomène en états ou cas élémentaires équivalents (en ce sens que l'apparition de chacun d'eux présente le même degré de possibilité) : on

appellera *probabilité mathématique* ou *probabilité a priori* d'un événement le rapport du nombre des cas favorables à l'événement (c'est-à-dire tels que leur apparition a pour cause l'apparition de l'évènement lui-même) au nombre des cas également possibles.

Supposons, par exemple, une urne qui contienne des boules ne différant que par la couleur, ou bien portant divers numéros : le nombre total des boules représente le nombre des cas possibles et le nombre des boules d'une couleur donnée, ou qui portent un numéro donné, représente le nombre des cas favorables à ce fait qu'une boule, extraite au hasard, soit de cette couleur ou porte ce numéro. Ce sont précisément des problèmes pouvant se réduire schématiquement à celui-ci, c'est-à-dire des problèmes relatifs aux jeux de hasard qui ont donné naissance au calcul des probabilités : ce qui s'explique, si l'on observe que, pour ces problèmes, la notion de cas également possibles, sur laquelle est basée celle de probabilité, prend une forme susceptible d'une interprétation et d'une vérification directes.

Désignons par E l'événement, par $n$ le nombre des cas possibles et par $m$ le nombre des cas favorables, $p = \frac{m}{n}$ est la probabilité de E.

Aux hypothèses que tous les cas possibles soient favorables et que aucun d'eux ne le soit correspondent la nécessité de l'apparition et de la non-apparition de l'événement. L'événement cesse, en toute rigueur, d'être un événement : il ne dépend plus, en effet, du hasard.

Dans le premier cas $p = 1$ et dans le second $p = 0$.

La probabilité d'un événement peut, par suite, prendre toutes les valeurs rationnelles de l'intervalle $(0, 1)$. La limite inférieure de l'intervalle est prise, par convention, comme expression de l'*impossibilité* et la limite supérieure comme expression de la *certitude* de l'apparition d'un événement.



**2.** — Supposons maintenant qu'on sépare les $m$ cas favorables à E en $r$ classes $m_1, m_2, \ldots m_r$ et qu'on désigne par $E_1, E_2, \ldots E_r$ les événements auxquels correspondent les cas favorables de ces diverses classes. L'égalité :

$$(1) \qquad p = \frac{m}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} + \ldots + \frac{m_r}{n} = p_1 + p_2 + \ldots + p_r$$

prouve que la probabilité de l'apparition de E est égale à la somme des probabilités correspondant aux apparitions de $E_1, E_2, \ldots E_r$.

D'où la proposition générale suivante : quand un événement peut se présenter de plusieurs façons distinctes et s'excluant mutuellement, la probabilité de l'apparition de l'événement est égale à la somme des probabilités correspondant à chacun de ces modes d'apparition (*théorème des probabilités totales*).

Le fait que les événements $E_1, E_2, \ldots E_r$ s'excluent mutuellement dérive pour nous du fait qu'on a réparti les $m$ cas favorables à E en $r$ classes de cas respectivement favorables à $E_1, E_2, \ldots E_r$; d'où il résulte qu'aucune classe de cas favorables n'a d'éléments communs avec les autres. Mais, en général, il peut être utile d'introduire, avec M. Bohlmann [1], la définition suivante des événements qui s'excluent mutuellement : ce sont des éléments tels que la probabilité de leur apparition simultanée est égale à zéro.

**3.** — Supposons au contraire que l'événement E ne puisse avoir lieu, sans que tous les événements $E_1, E_2, \ldots E_r$ aient lieu également dans l'ordre de succession défini par les indices, et désignons par $p'_i = \frac{m'_i}{n'_i}$ la probabilité pour que $E_i$ ait lieu après que les $i - 1$ événements précédents se seront également produits : le nombre $m'$ des cas favorables et le nombre $n'$ des cas possibles

[1] *Lebensversicherungsmathematik* dans l'*Encykl. der math. Wissenchaften*, ID6, page 859.

seront définis, pour E, par les égalités :

$$m' = m_1\, m'_2 \ldots m'_r$$
$$n' = n_1\, n'_2 \ldots n'_r$$

Un quelconque des $n_1$ premiers cas possibles peut en effet avoir lieu en même temps qu'un quelconque des cas exprimés par $n'_2, \ldots n'_r$ : le nombre total des cas possibles pour E sera donc exprimé précisément par les $n_1\, n'_2 \ldots n'_r$ groupements possibles : les cas favorables sont d'autre part tous ceux formés de l'un des $m_1$ premiers cas favorables associé avec l'un quelconque des $m_2' \ldots m'_r$ cas favorables de chacune des autres classes.

De l'égalité :

$$(2) \qquad p' = \frac{m'}{n'} = \frac{m_1}{n_1}\,\frac{m'_2}{n'_2} \cdots \frac{m'_r}{n'_r} = p_1 p'_2 \ldots p'_r$$

il résulte que la probabilité $p'$ de l'apparition de l'événement E est égale au produit des probabilités de l'apparition de chacun des événements $E_1, E_2 \ldots E_r$ après l'apparition de tous les événements qui le précèdent dans la suite.

Désignons de même par $m_1, m_2, \ldots m_r,\ n_1, n_2, \ldots n_r$ les cas favorables et les cas possibles pour les événements $E_1, E_2, \ldots E_r$ supposés tels que l'apparition de chacun d'eux soit indépendante de l'apparition des autres : on aura, comme précédemment :

$$(3) \qquad p = \frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1}\,\frac{m_2}{n_2} \cdots \frac{m_r}{n_r}$$

pour la probabilité de l'apparition simultanée de $E_1, E_2, \ldots E_r$.

L'indépendance réciproque de $E_1, E_2, \ldots E_r$ est donc établie si l'on a, quel que soit leur ordre, les égalités :

$$p_i = p'_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots r).$$

On a la proposition suivante : l'apparition simultanée de plusieurs événements indépendants est égale au produit des probabilités de ces événements (*théorème des probabilités composées*).



Si

$$\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} = \ldots = \frac{m_r}{n_r} = p$$

on a :

$$(4) \qquad p = p_1{}^r.$$

La probabilité pour qu'un événement ait lieu $r$ fois sur $r$ est égale à la $r^e$ puissance de la probabilité de l'événement lui-même.

**4.** — Comme exemple de probabilités composées, nous pouvons donner le suivant : une urne contient 90 boules portant les numéros 1, 2, ... 90, on tire trois fois de suite une boule unique et on demande la probabilité pour que les trois boules tirées portent un numéro impair, en supposant que la boule soit remise dans l'urne après chaque tirage. Cette probabilité est évidemment définie par

$$\left(\frac{45}{90}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Nous pouvons supposer au contraire que les boules sont extraites simultanément de l'urne ou qu'elles ne sont pas remises dans l'urne après chacun des deux premiers tirages.

La probabilité pour que la première soit impaire est donnée, comme précédemment, par $\frac{45}{90}$. Mais la probabilité pour que, la première ayant été impaire, la seconde le soit aussi, est au contraire $\frac{44}{89}$, et celle pour que la troisième le soit, les deux autres l'ayant été, est $\frac{43}{88}$. D'où la probabilité demandée :

$$\frac{45 \,.\, 44 \,.\, 43}{90 \,.\, 89 \,.\, 88} = \frac{43}{356}.$$

**5.** — Les problèmes de probabilité peuvent se diviser en trois

classes, selon que le nombre des cas possibles est fini et inférieur à certaines limites, fini et très grand ou infini.

A la première classe appartiennent les problèmes relatifs aux jeux du hasard : leur résolution se ramène à celle de problèmes d'analyse combinatoire, et l'équivalence supposée des cas possibles se réduit à cette hypothèse que, en dehors des différences déterminant la classification des cas en cas favorables et en cas contraires à l'événement, il n'y a pas d'autres différences qui puissent être perçues par nos sens ou qui puissent influer de quelque manière sur les conditions du jeu.

A la deuxième classe appartiennent les problèmes relatifs aux applications statistiques du calcul des probabilités. Les probabilités, que l'on cherche, ne sont susceptibles que d'expressions approchées et l'équivalence des cas possibles résulte de *conventions* déterminées, antérieures à l'application des règles du calcul.

La troisième classe contient des problèmes pouvant se réduire au suivant : on demande la probabilité pour qu'un élément, choisi au hasard dans un ensemble continu donné d'éléments géométriques, vérifie des conditions déterminées ou possède des propriétés déterminées, qui soient insuffisantes à le définir complètement.

D'où le nom de *probabilités géométriques* attribué aux probabilités de cette classe, et celui de *théorie des probabilités géométriques* attribué à la théorie qui les concerne.

La question fondamentale, pour ces probabilités, est la suivante : comment doit-on formuler analytiquement le fait que toutes les valeurs d'une variable continue comprises dans un certain intervalle sont également possibles ? Ou encore : quel sens a l'assertion que tous les points d'un segment rectiligne doivent être considérés comme également possibles ?

On admet qu'à des intervalles égaux du domaine de la variable correspond un même contenu d'*éléments* ou de *points analytiques* (1),

(1) On entend par élément ou point analytique d'un domaine d'ordre $n$ tout



qu'à des arcs d'égale longueur pris sur des courbes planes ou gauches, à des aires égales prises sur des surfaces planes ou gauches et à des volumes égaux correspond un même contenu de points géométriques.

Si un ensemble continu de points géométriques est défini par des relations entre les $n$ variables $x_1, x_2, \ldots x_n$, l'ensemble des cas possibles sera défini par l'intégrale multiple d'ordre $n$ :

$$\int\int \ldots dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

étendue à tous les groupements des variables $x_1, x_2, \ldots x_n$ qui sont possibles, et l'ensemble des cas favorables par une intégrale analogue étendue à ceux des groupements qui remplissent les conditions imposées à l'élément dont on cherche la probabilité pour qu'il soit choisi au hasard dans l'ensemble : la probabilité demandée s'exprime par le rapport de la deuxième intégrale à la première (1).

Définissons plus généralement la probabilité d'un événement comme le rapport de l'étendue de l'ensemble des cas ou éléments

système de valeurs des $n$ variables $x_1, x_2, \ldots x_n$ contenues dans ce domaine. On sait comment les $n$ nombres $x_1, x_2, \ldots x_n$ déterminent un point géométrique dans l'espace à $n$ dimensions.

(1) Ou encore : si $\varphi(x)dx$ exprime la probabilité pour que $x$ soit compris entre $x$ et $x + dx$ (probabilité correspondant à un hasard élémentaire), on a évidemment :

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)dx$$

pour la probabilité que $x$ soit compris entre $x_0$ et $x_1$.

Dans le cas de $n$ variables, l'intégrale multiple d'ordre $n$ :

$$\int\int \ldots \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)\, dx_1, dx_2, \ldots dx_n,$$

étendue aux valeurs des variables limitant le domaine dans lequel on veut choisir le point $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, exprime la probabilité demandée. Il est inutile de faire remarquer que la définition actuelle ne diffère qu'en apparence de celle du texte.

favorables à l'étendue totale des cas supposés également possibles : la définition primitive apparaît comme un cas particulier, celui où l'ensemble des cas possibles est un ensemble discret : au dénombrement des cas, on substitue, dans le cas des probabilités géométriques, la mesure des éléments géométriques qui leur servent de support [1].

A cette troisième classe appartiennent les problèmes de la théorie des erreurs. Les problèmes de probabilités géométriques ne sont complètement définis que si l'on a fixé par une convention le système de variables que l'on prend pour définir l'élément géométrique, dont dépend la probabilité cherchée [2].

**6.** — Si $p = \frac{m}{n}$ désigne la probabilité de l'apparition de E, on a évidemment

$$\frac{n-m}{n} = 1 - p$$

pour la probabilité de la non-apparition de E ou, autrement dit, pour la probabilité de l'apparition de l'événement contraire de E. Désignons cet événement contraire par E′ et la probabilité de son apparition par $q$. On a :

$$p + q = 1$$

Il n'y a pas en effet d'autre cas possible que l'apparition ou la non-apparition de l'événement.

Supposons maintenant qu'on fasse $s$ épreuves, dans des conditions expérimentales semblables : d'après le théorème des probabilités composées, on aura la probabilité

$$p^{\alpha} q^{s-\alpha} \tag{5}$$

(1) Czuber, *die Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung*. Leipzig 1903 I, IV et *Probabilités et Moyennes géométriques*. Paris, Hermann, 1903.

(2) Poincaré. — *Calcul des probabilités*, pages 96 et suivantes.



pour que l'événement E ait eu lieu $\alpha$ fois et l'événement E′ $s - \alpha$ fois, dans un ordre donné à l'avance.

Soit, par exemple, $s = 6$ et soit à trouver la probabilité pour que E arrive 4 fois et E′ 2 fois, dans l'ordre défini par la suite :

EEE′ EEE′

cette probabilité est évidemment :

$$ppqppq = p^4 q^2.$$

Mais on peut supposer, au contraire, qu'on demande la probabilité pour que E arrive 4 fois et E′ 2 fois, dans un ordre quelconque. Cette probabilité est évidemment la somme des probabilités pour que E arrive 4 fois et E′ 2 fois, dans l'ordre donné précédemment ou dans chacun des autres ordres possibles. Les ordres possibles sont en nombre égal à celui des permutations de 6 objets, dont 4 égaux entre eux et les 2 autres égaux entre eux et différents des premiers. D'où l'expression :

$$\frac{6!}{4!\,2!} p^4 q^2$$

de la probabilité demandée.

En général, si $s$ et $\alpha$ sont des entiers positifs quelconques, la probabilité pour que, dans $s$ épreuves, les événements E et E′ arrivent respectivement $\alpha$ et $s - \alpha$ fois, dans un ordre quelconque, est donnée par l'expression :

$$\frac{s!}{\alpha!\,(s-\alpha)!} p^{\alpha} q^{s-\alpha}$$

qui, d'après un théorème connu d'analyse combinatoire, est égale à :

$$\binom{s}{\alpha} p^{\alpha} q^{s-\alpha} \tag{6}$$

(où $\binom{n}{r}$ exprime le nombre des combinaisons de $n$ éléments $r$ à $r$).

A $\alpha = s, s - 1, \ldots 1, 0$ correspondent les termes successifs du

développement de :

$$(p+q)^s \quad (^1)$$

$$(7) \qquad \sum \binom{s}{\alpha} p^\alpha q^{s-\alpha} = (p+q)^s = 1.$$

Il est évident, en effet, que $\alpha$ doit avoir une et une seule des valeurs entières de l'intervalle $(o, s)$, limites comprises.

## II. — Valeur la plus probable. Valeur probable. Erreur moyenne.

**7.** — Désignons par $u_\alpha$ le terme :

$$\frac{s!}{\alpha!\,(s-\alpha)!}\, p^\alpha q^{s-\alpha}$$

du développement de $(p+q)^s$. On aura :

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{u_{\alpha+1}}{u_\alpha} &= \frac{s!}{(\alpha-1)!\,(s-\alpha-1)!}\, p^{\alpha+1} q^{s-\alpha-1} \frac{\alpha!\,(s-\alpha)!}{s!}\, p^{-\alpha} q^{-s+\alpha} \\ &= \frac{s-\alpha}{\alpha+1}\frac{p}{q} \end{aligned} \right.$$

et si l'on remplace $\alpha$ par $\alpha - 1$ :

$$(9) \qquad \frac{u_\alpha}{u_{\alpha-1}} = \frac{s-\alpha+1}{\alpha}\frac{p}{q}.$$

(1) On peut supposer, plus généralement que $p_1, p_2, \ldots p_s$ désignent respectivement les probabilités d'apparition des événements $E_1, E_2 \ldots E_s$ et $q_1, q_2, \ldots q_s$ les probabilités d'apparition des événements contraires $E'_1, E'_2 \ldots E'_s$. Les termes du développement :

$$(p_1 + q_1)(p_2 + q_2) \ldots\ldots (p_s + q_s) = 1$$

expriment alors les probabilités correspondant aux arrangements possibles de E et de E′ en séries de $s$ épreuves, chacun des événements donnant lieu à une épreuve unique. Les termes du développement

$$(p_1 + q_1)^{\alpha_1} (p_2 + q_2)^{\alpha_2} \ldots\ldots (p_s + q_s)^{\alpha_s} = 1$$

expriment les probabilités correspondant aux arrangements possibles de E et de E′ en séries de $\alpha_1 + \alpha_2 \ldots + \alpha_s$ épreuves, dont $\alpha_1$ pour l'événement $E_1$, $\alpha_2$ pour $E_2, \ldots \alpha_s$ pour $E_s$.



On demande s'il y a une valeur de $\alpha$, et quelle est cette valeur, qui rende maximum la probabilité définie par le terme correspondant $u_\alpha$ du développement. Nous voulons que l'on ait :

$$u_{\alpha-1} < u_\alpha > u_{\alpha+1}.$$

Ces deux inégalités sont équivalentes aux suivantes :

$$(10) \qquad \frac{u_{\alpha+1}}{u_\alpha} = \frac{s-\alpha}{\alpha+1}\frac{p}{q} < 1$$

$$(11) \qquad \frac{u_\alpha}{u_{\alpha-1}} = \frac{s-\alpha+1}{\alpha}\frac{p}{q} > 1$$

d'où

$$(12) \qquad p(s-\alpha) < q(\alpha+1)$$

$$(13) \qquad p(s-\alpha+1) > q\alpha$$

et

$$(14) \qquad ps - q < \alpha < ps + p.$$

On a : $p + q = 1$. Donc si $ps - q$ est fractionnaire, il en est de même de $ps + p$ et il existe une valeur entière de $\alpha$ et une seule comprise entre ces deux nombres : cette valeur est $ps$. Si au contraire $ps - q$ est un nombre entier, il en est de même de $ps + p$ et il n'y a aucun nombre entier compris entre ces deux-là : deux termes consécutifs du développement sont égaux.

La quantité :

$$\alpha = ps$$

(ou, dans le cas de $ps - q$ entier, les deux quantités $\alpha = ps - q$ et $\alpha = ps + p$) exprime le nombre d'apparitions de E dans une série de $s$ expériences auquel correspond la probabilité maxima :

$$\frac{s!}{(sp)!\,(sq)!}\, p^{sp} q^{sq}.$$

Cette quantité $ps$ s'appelle la *valeur la plus probable de* $\alpha$. De $\alpha = ps$, on déduit :

$$s - \alpha = s - ps = sq$$

et de :

$$ps - q < \alpha < ps + p$$

on déduit :

$$\mp \frac{q}{s} < \frac{\alpha}{s} - p < \pm \frac{p}{s} \tag{15}$$

de sorte que la différence $\frac{\alpha}{s} p$ est comprise entre $\pm \frac{1}{s}(p+q) = \pm \frac{1}{s}$ : on peut la rendre aussi petite qu'on le veut en augmentant suffisamment le nombre des épreuves : elle tend vers $o$ lorsque $s$ croît indéfiniment.

Si l'on choisit $\alpha$ de façon que la probabilité correspondante soit la plus grande possible, le rapport $\frac{\alpha}{s - \alpha}$ est d'autant plus voisin de $\frac{p}{q}$ que $s$ est plus grand.

**8.** — La notion de *valeur probable* est différente. Si à chacune des valeurs entières de l'intervalle $o, s$ de la variable $\alpha$ correspond une probabilité $\varphi(\alpha)$ et si :

$$\sum_{o}^{s}{}_{\alpha}\, \varphi(\alpha) = 1$$

on appelle *valeur probable de* $\alpha$ la quantité :

$$\sum_{\alpha}^{s} \alpha \varphi(\alpha) = \alpha^{o}. \tag{16}$$

On peut aussi appeler $\alpha^{o}$ l'*espérance mathématique de* $\alpha$ pour un individu déterminé. On imagine alors que l'apparition d'un événement de probabilité $\varphi(\alpha)$ soit la cause, pour cet individu, d'un gain $\pm \alpha$, considéré comme négatif dans le cas où l'apparition de l'événement serait pour le joueur la cause d'une perte.

Un jeu est équitable, par définition, si l'espérance mathématique de chacun des joueurs qui y participe est égale à zéro.

**9.** — D'une façon analogue, si, à chacune des valeurs entières



de la variable $\alpha$ correspond, dans l'intervalle $(o, s)$ la probabilité $\varphi(\alpha)$ et si $\alpha^{o}$ est la valeur probable de $\alpha$, l'équation

$$m^2 = \sum \varphi(\alpha)\, (\alpha - \alpha^{o})^2 \tag{17}$$

définit *l'erreur moyenne m de* $\alpha$.

**10.** — Supposons, comme précédemment, que $\alpha$ représente le nombre de fois que l'événement E, de probabilité constante $p$, arrivera dans une série de $s$ épreuves : nous nous proposons de déterminer les valeurs probables de $\alpha$, $\alpha^2$ et des différences $\alpha - \alpha^{o}$, $(\alpha - \alpha^{o})^2$.

En d'autres termes, nous nous proposons d'effectuer les sommations :

$$\Sigma \alpha \varphi(\alpha),\ \Sigma \alpha^2 \varphi(\alpha),\ \Sigma(\alpha - \alpha^{o}) \varphi(\alpha),\ \Sigma(\alpha - \alpha^{o})^2 \varphi(\alpha)$$

dans le cas spécial où l'on a :

$$\varphi(\alpha) = \frac{s!}{\alpha!\, s - \alpha!}\, p^{\alpha} q^{s-\alpha} \tag{18}$$

On a :

$$\sum_{o}^{s}{}_{\alpha} \frac{s!}{\alpha!\, (s - \alpha)!}\, p^{\alpha} q^{s-\alpha} = (p + q)^{s}.$$

Les quantités $p$ et $q$ n'étant pas indépendantes, on ne peut différentier par rapport à l'une d'elles sans tenir compte de sa relation avec l'autre : c'est pourquoi nous nous servirons de la relation plus générale :

$$\sum_{o}^{s}{}_{\alpha} \binom{s}{\alpha} (tp)^{\alpha} q^{s-\alpha} = (tp + q)^{s} \tag{19}$$

d'où l'on déduit, en différentiant par rapport à la variable auxiliaire $t$ :

$$\sum_{o}^{s}{}_{\alpha}\, \alpha \binom{s}{\alpha} p\, (tp)^{\alpha-1} q^{s-\alpha} = sp\, (tp + q)^{s-1} \tag{20}$$

et

$$(21)\qquad \alpha^0 = \sum_{\alpha=0}^{s} \alpha \binom{s}{\alpha} p^\alpha q^{s-\alpha} = ps$$

pour $t = 1$. Mais si l'on multiplie par $tp$ les deux membres de l'équation (20) et si l'on différencie de nouveau par rapport à $t$, on a aussi :

$$\sum_{\alpha=0}^{s} \alpha^2 p^2 \binom{s}{\alpha} (tp)^{\alpha-1} q^{s-\alpha} = sp^2 (tp+q)^{s-1} + \\ + s(s-1)p^3 t (tp+q)^{s-2}$$

d'où :

$$(22)\qquad (\alpha^2)^0 = \sum_{\alpha=0}^{s} \alpha^2 \binom{s}{\alpha} p^\alpha q^{s-\alpha} = sp + s^2p^2 - sp^2$$

pour $t = 1$.

On a ensuite, d'une façon évidente :

$$(23)\quad (\alpha - \alpha^0)^0 = \sum (\alpha - \alpha^0)\varphi(\alpha) = \sum_{\alpha=0}^{s} \alpha\varphi(\alpha) - \alpha^0 \sum \varphi(\alpha) = 0$$

et puisque

$$(\alpha - \alpha^0)^2 = \alpha^2 + (\alpha^0)^2 - 2\alpha\alpha^0,$$

on a :

$$(24)\quad \left\{ \begin{aligned} (m^2)^0 &= \sum_{\alpha=e}^{s} (\alpha - \alpha^0)^2 \binom{s}{\alpha} p^\alpha q^{s-\alpha} = (\alpha^2)^0 + \\ &+ (\alpha^0)^2 - 2(\alpha^0)^2 = sp(1-p) = spq \end{aligned} \right.$$

L'équation (21) montre donc que, dans le cas où $\varphi(\alpha)$ est défini par l'équation (18), la valeur probable et la valeur la plus probable coïncident. Nous aurons l'occasion de revenir sur l'expression remarquable de la valeur moyenne fournie par l'égalité (24).



### III. — Théorème de Tchebycheff-Pizzetti

**11.** — Soit $a > m$. De l'égalité :

$$m^2 = \Sigma(\alpha - \alpha^0)^2 \varphi(\alpha).$$

On tire, en posant :

$$\alpha_i - \alpha^0 = h_i$$

et en divisant par $a^2$ :

$$(25)\qquad \varphi(\alpha_1)\frac{h_1^2}{a^2} + \varphi(\alpha_2)\frac{h_2^2}{a^2} \dots + \varphi(\alpha_s)\frac{h_s^2}{a^2} = \frac{m^2}{a^2}.$$

Désignons par $h'$, $h''$, $h'''$ ... les écarts par rapport à la valeur moyenne supérieurs à $a$ en valeur absolue et négligeons les autres ; soient $\varphi(\alpha)'$, $\varphi(\alpha)''$, $\varphi(\alpha)'''$ ... les valeurs de la fonction $\varphi(\alpha)$ correspondant aux écarts conservés. On aura :

$$(26)\qquad \varphi(\alpha)'\frac{h'^2}{a^2} + \varphi(\alpha)''\frac{h''^2}{a^2} + \dots < \frac{m^2}{a^2}$$

et, a fortiori, puisque $\frac{h'^2}{a^2} > 1$ :

$$(27)\qquad \varphi(\alpha)' + \varphi(\alpha)'' + \dots < \frac{m^2}{a^2}.$$

Si P désigne la probabilité pour que la valeur numérique de l'erreur moyenne d'une observation soit inférieure ou égale à $a$, le premier membre est évidemment égal à $1 - P$. On a par suite :

$$1 - P < \frac{m^2}{a^2}$$

$$(28)\qquad P > 1 - \frac{m^2}{a^2}$$

ou encore :

$$(29)\qquad P > 1 - \frac{1}{\lambda^2}$$

si l'on pose :

$$a = \lambda m.$$

*La probabilité* P *pour que la différence* $|\alpha - \alpha^0|$ *ne surpasse pas le multiple* $\lambda m$ *de l'erreur moyenne est supérieure à* $1 - \frac{1}{\lambda^2}$.

**12.** — Mais on démontre que si $m_1$, $m_2$ ... et $\alpha^0 = \Sigma\alpha\varphi(\alpha)$, $\beta^0 = \Sigma\beta\psi(\beta)$ désignent les erreurs moyennes et les valeurs probables de $\alpha$, $\beta$, ... et si $m$ désigne l'erreur moyenne de $\alpha+\beta+\ldots$, on a :

$$m^2 = m^2_1 + m^2_2 + \ldots$$

On a en effet :

$$\alpha + \beta + \ldots - \alpha^0 - \beta^0 - \ldots = (\alpha - \alpha^0) + (\beta - \beta^0) + \ldots$$

et :

$$(30) \qquad m^2 = \sum_\alpha \sum_\beta \ldots \{(\alpha - \alpha^0) + \ldots (\beta - \beta^0) + \ldots\}^2 \varphi(\alpha)\psi(\beta) \ldots$$

En développant $\{(\alpha - \alpha^0) + (\beta - \beta^0) + \ldots\}^2$, on décompose $m^2$ en une somme de quantités de la forme :

$$(31) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \ldots \sum_\alpha \sum_\beta \ldots (\alpha - \alpha^0)^2 \varphi(\alpha)\psi(\beta) \ldots \\ \sum_\alpha \sum_\beta \ldots (\beta - \beta^0)^2 \varphi(\alpha)\psi(\beta) \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

et de la forme :

$$(32) \qquad 2 \sum_\alpha \sum_\beta \ldots (\alpha - \alpha^0)(\beta - \beta^0) \varphi(\alpha)\psi(\beta) \ldots$$

Aux sommes (31), on peut évidemment substituer les suivantes :

$$\ldots \sum_\beta \psi(\beta) \sum_\alpha (\alpha - \alpha^0)^2 \varphi(\alpha) = \sum_\beta \psi(\beta) \ldots m^2_1 = m^2_1$$

$$\ldots \sum_\alpha \varphi(\alpha) \sum_\beta (\beta - \beta^0)^2 \psi(\beta) = \sum_\alpha \varphi(\alpha) \ldots m^2_2 = m^2_2$$

. . . . . .

En décomposant les sommations multiples (32) en produits de sommations simples, effectuées par rapport aux variables $\alpha$, $\beta$, ... on voit, par l'application répétée des formules (23) :

$$\Sigma(\alpha - \alpha^0)\varphi(\alpha) = 0 \qquad \Sigma(\beta - \beta^0)\varphi(\beta) = 0 \ldots$$

que les sommes (31) se réduisent à zéro. D'où la démonstration de la proposition énoncée.



Cette proposition permet d'étendre immédiatement le théorème de Tchebycheff-Pizzetti au cas de plusieurs variables.

*Il y a une probabilité* P *supérieure à* $1 - \frac{1}{\lambda^2}$ *pour que la différence* $|\alpha + \beta + \ldots - \alpha^0 - \beta^0 - \ldots|$ *ne dépasse pas le multiple* $\lambda m$ *de l'erreur moyenne de* $\alpha + \beta + \ldots$ [1].

[1] La démonstration donnée dans le texte pour le cas d'une seule variable est due à *P. Pizzetti. I fondamenti matematici per la critica dei risultati sperimentali* (dans les *Ann. della R. Univ. di Genova* 1892, pages 184, 185). Par une méthode analogue, en substance, à celle suivie dans le texte, on démontre le théorème suivant, et d'autres qu'on en déduit : ils ont été énoncés par *Tchebycheff* (*Des valeurs moyennes, Journ. de Math. pures et appl.* Liouville XII, 1867) : *La probabilité* P *pour que la différence* $|\alpha + \beta + \ldots - \alpha^0 - \beta^0 - \ldots|$ *soit inférieure ou égale à*

$$\pm \lambda \sqrt{(\alpha^2)^0 + (\beta^2)^0 + \ldots - (\alpha^0)^2 - (\beta^0)^2 - \ldots}$$

*est supérieure à* $1 - \frac{1}{\lambda^2}$.

Si $n$ est le nombre des variables $\alpha$, $\beta$ ... et si l'on pose :

$$\lambda = \frac{\sqrt{n}}{t}$$

on en déduit immédiatement le théorème suivant :

*La probabilité* P *pour que la moyenne arithmétique* $\frac{\alpha + \beta + \cdots}{n}$ *des valeurs observées de* $\alpha$, $\beta$ ... *soit comprise entre les limites* :

$$\frac{\alpha^0 + \beta^0 + \ldots}{n} \mp \frac{1}{t} \sqrt{\frac{(\alpha^2)^0 + (\beta^2)^0 + \ldots}{n} - \frac{(\alpha^0)^2 + (\beta^0)^2 + \ldots}{n}}$$

*est supérieure à* $1 - \frac{t^2}{n}$.

Si $\alpha^0$, $\beta^0$, ... $(\alpha^2)^0$, $(\beta^2)^0$ ... ne dépassent pas une limite finie, il en est de même de $\frac{(\alpha^2)^0 + (\beta^2)^0 + \cdots}{n}$ et de $\frac{(\alpha^0)^2 + (\beta^0)^2 + \cdots}{n}$ et de la racine carrée de leur différence. Par suite on peut choisir $t$ de manière que les limites fixées par le théorème II soient aussi petites qu'on le veut, et comme la différence $1 - \frac{t^2}{n}$ tend pour $n$ infini vers la limite 1, on voit que :

*Si les valeurs probables des variables* $\alpha$, $\beta$ ... *et les valeurs probables de leurs carrés sont des quantités finies, la probabilité pour que la différence*

$$\frac{\alpha + \beta + \ldots}{n} - \frac{\alpha^0 + \beta^0 + \ldots}{n}$$

*soit inférieure à une quantité donnée aussi petite qu'on le veut tend vers* 1, *lorsque* $n$ *croît indéfiniment.* Cf. aussi Czuber *loc. cit.* pages 176-183.

Pour la bibliographie des travaux de Tchebycheff et Liapounoff se rapportant au théorème indiqué (voir *Encycl. des Sc. Math.*, t. I, vol. IV, p. 42).

### IV. — Cas particulier : Théorèmes de Bernoulli et de Poisson

**13.** — Supposons qu'il s'agisse de la loi de probabilité définie par le développement du binôme $(p+q)_s$ : nous supposons que $p$ désigne la probabilité pour que l'événement E ait lieu, que $q$ désigne la probabilité pour qu'il n'ait pas lieu et que l'on fasse $s$ épreuves. La valeur probable du carré $m^2$ de l'erreur moyenne est alors définie par la formule :

$$m^2 = spq$$

[§ 2, n° 10, form. (24)], d'où :

$$m = \sqrt{spq}$$

et la valeur probable du nombre de fois que E devra avoir lieu est $sp$ [§ 2, n° 10, form. (21)].

D'après le théorème énoncé au paragraphe précédent, il y a une probabilité P supérieure à $1 - \frac{1}{\lambda^2}$ pour que le nombre de fois que E a eu effectivement lieu soit compris entre les limites ·

$$ps \mp \lambda \sqrt{spq}$$

ou

$$ps \mp \frac{s}{t} \sqrt{pq}$$

en posant :

$$\lambda = \frac{\sqrt{s}}{t}.$$

Considérons le rapport de $ps \mp \frac{s}{t}\sqrt{pq}$ à $s$, c'est-à-dire :

$$p \mp \frac{1}{t}\sqrt{pq}$$

$t$ croît en raison directe de $\sqrt{s}$ : il en résulte qu'on peut toujours choisir $s$ suffisamment grand pour qu'il y ait une probabilité



$P > 1 - \frac{1}{\lambda^2} = 1 - \frac{t^2}{s}$ pour que ce rapport diffère de $p$ d'une quantité donnée aussi petite qu'on le veut.

C'est là, en substance, l'énoncé du théorème de Bernoulli [1], si l'on remarque qu'il est toujours possible de déterminer $\lambda$ de façon que P diffère d'aussi peu qu'on le veut de l'unité.

**14.** — On peut aussi supposer que $p_1$, $q_1$ désignent respectivement les probabilités pour que l'événement E ait lieu ou n'ait pas lieu à la première épreuve, $p_2$, $q_2$ les nombres analogues pour la seconde épreuve ... $p_s$, $q_s$ les nombres analogues pour la $s^e$ épreuve.

Si $m_1$, $m_2$ ... désignent les erreurs moyennes correspondant à chacune des épreuves, l'erreur moyenne $m$ pour l'ensemble des épreuves est égale à

$$\sqrt{m^2_1 + m^2_2 + \ldots + m^2_s}$$

(§ 3, n° 12) ou bien, puisque pour chaque épreuve isolée on a $s = 1$,

$$m = \sqrt{p_1q_1 + p_2q_2 + \ldots + p_sq_s}$$

On trouve, d'une façon tout à fait semblable à celle employée précédemment, qu'on peut toujours choisir $s$ suffisamment grand pour qu'il y ait une probabilité $P > 1 - \frac{t^2}{s}$ que

$$\frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_s}{s} \mp \frac{1}{t}\sqrt{\frac{p_1q_1 + p_2q_2 + \ldots + p_sq_s}{s}}$$

diffère de

$$\frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_r}{s}$$

d'une quantité aussi petite qu'on le veut.

[1] Le théorème de Bernoulli est le suivant : le rapport entre le nombre de fois que l'événement E de probabilité constante $p$ se présente et le nombre total $s$ des épreuves a pour limite $p$ lorsque $s$ augmente indéfiniment.

Ce théorème constitue, en somme, l'extension du théorème de Bernoulli au cas de probabilités variables, extension connue sous le nom de loi des grands nombres, ou loi de Poisson.

**15.** — Si l'on pose $\lambda = 3$, on a $P > 1 - \frac{1}{9} = 0{,}888\ldots$ Nous aurons l'occasion de montrer comment l'hypothèse sur laquelle est basé le théorème de Bernoulli permet de définir P d'une façon encore plus approchée, en lui assignant une valeur très voisine de 0,9973 et par suite très voisine de l'unité.

Des écarts de la valeur probable supérieurs au triple (et a fortiori aux multiples suivants) de l'erreur moyenne présentent donc des probabilités très petites et par suite négligeables : il y a une probabilité voisine de la certitude absolue (à cette dernière correspond, nous l'avons vu, la probabilité un) pour que de semblables écarts ne se présentent pas du tout : en d'autres termes, il y a là un certain degré de certitude que nous appellerons certitude morale et qui est précisément celui sur lequel nos jugements sont basés d'habitude.

De toutes façons, nous savons maintenant qu'il nous est possible d'appliquer la théorie des probabilités à des problèmes bien différents de ceux que nous avons considérés jusqu'ici. La connaissance des causes qui déterminent l'apparition d'un événement, ce dernier étant tel qu'on puisse préciser les cas possibles, nous avait permis de déterminer ce que nous avions appelé « probabilité à priori » de l'événement. Supposons maintenant qu'on ne connaisse rien au sujet de ces causes, mais qu'on sache au contraire que, sur un nombre très grand $s$ d'épreuves, l'événement considéré a eu lieu $\alpha$ fois dans des conditions qui, si elles étaient connues, permettraient la détermination de la probabilité a priori. Par exemple, supposons qu'on sache qu'on a extrait d'une urne, dont on ignore tout à fait le contenu, $s$ boules, parmi lesquelles $\alpha$ boules rouges.



Nous appellerons $\frac{\alpha}{s}$ « probabilité à posteriori » de l'événement considéré : dans l'exemple précédent c'est la probabilité a posteriori du tirage d'une boule rouge.

Le théorème énoncé plus haut nous apprend que le rapport ainsi désigné sous le nom de probabilité *a posteriori* diffère de la probabilité *a priori* d'une quantité d'autant plus petite que $s$ est plus grand. Pour $s$ infini (et, dans les applications, pour les valeurs de $s$ qu'on peut pratiquement considérer comme infinies), la probabilité *a priori* et la probabilité *a posteriori* coïncident. Pour les valeurs finies et suffisamment grandes de $s$, on peut, connaissant la probabilité *a posteriori*, déterminer la probabilité *a priori*, à moins d'une certaine quantité près, relativement assez faible. Ce sont les problèmes où l'on effectue de pareilles déterminations qui sont les plus importants pour les applications scientifiques.

### V. — Loi de fréquence des erreurs de Gauss. Méthode des moindres carrés

Parmi les problèmes auxquels nous venons de faire allusion, le suivant est fondamental :

On a fait $n$ mesures d'une grandeur donnée et on a obtenu les valeurs $x_1, x_2, \ldots x_n$. Les mesures ont été effectuées avec une précision constante et telle qu'on puisse exclure les causes d'erreur agissant dans le même sens pour toutes les mesures.

En d'autres termes : les divergences présentées par les valeurs $x$ ou, ce qui revient au même, les erreurs qui affectent chacune des observations, sont le résultat d'un ensemble de causes dont le mode d'action est inconnu et ne peut être déterminé. Nous appellerons ces erreurs des *erreurs accidentelles*, par opposition avec les *erreurs systématiques*, qui dépendent de causes agissant d'une façon régulière : nous supposons qu'on a supprimé ces

dernières erreurs ou qu'on les a éliminées, en faisant subir aux données les corrections convenables.

On peut supposer qu'il existe une probabilité $\varphi(\varepsilon)d\varepsilon$ pour qu'une erreur soit comprise entre $\varepsilon$ et $\varepsilon + d\varepsilon$ : la fonction $\varphi(\varepsilon)$ définit alors ce qu'on appelle la *loi de fréquence des erreurs*.

Cette hypothèse est fondée sur cette idée que, vraisemblablement, la fréquence d'une erreur dépend de la grandeur de cette erreur : il est assez peu probable par exemple — et l'on pourrait même dire qu'il est pratiquement impossible, ou presque impossible — que des erreurs très grandes soient commises, si les observations sont faites avec assez de soin. Mais c'est là néanmoins une hypothèse arbitraire : car la constatation d'un pareil rapport entre la fréquence d'une erreur et son amplitude ne légitime pas, *a priori*, l'hypothèse de l'existence d'une fonction déterminée de l'erreur, pouvant représenter la probabilité de cette erreur.

On demande quelle forme on doit attribuer à la fonction $\varphi(\varepsilon)$. Cette question est évidemment subordonnée à celle-ci : quel est le but que le calculateur se propose d'atteindre ? Pour Gauss, ce but est le suivant : la moyenne des valeurs observées doit coïncider avec la valeur la plus probable [1].

Soit

$$x_o = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

On en déduit :

$$(x_1 - x_o) + (x_2 - x_o) + \ldots + (x_n - x_o) = 0$$

ou, en désignant par les lettres $\lambda$ les écarts entre les valeurs $x$ et leur moyenne (erreurs apparentes) :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 0.$$

[1] Cette hypothèse repose sur le théorème dit *théorème de la moyenne* d'après lequel « la valeur la plus probable de la grandeur inconnue est égale à la moyenne arithmétique des valeurs observées directement » : la légitimité de ce théorème, pour le cas d'un nombre infiniment grand d'observations, peut être recherchée dans les théorèmes de Tchebycheff, rappelés plus haut (et surtout dans les théorèmes II et III).



La probabilité pour que les erreurs commises dans les $n$ observations, supposées indépendantes, soient égales respectivement à $x - x_1$, $x - x_2$, ... la vraie valeur étant égale à $x$, est, d'après le théorème des probabilités composées :

$$\varphi(x - x_1)\,\varphi(x - x_2) \ldots \varphi(x - x_n) \tag{33}$$

On veut déterminer la fonction $\varphi$ de telle sorte que ce produit soit maximum lorsqu'on y remplace la valeur inconnue $x$ par $x_o$. La dérivée de (33) doit être égale à zéro. La dérivée logarithmique de (33) est égale à :

$$\frac{\varphi'(x_1 - x_o)}{\varphi(x_1 - x_o)} + \frac{\varphi'(x_2 - x_o)}{\varphi(x_1 - x_o)} + \ldots + \frac{\varphi'(x_n - x_o)}{\varphi(x_n - x_o)} \tag{34}$$

Si l'on pose, comme précédemment, $x_i - x_o = \lambda_i$ et :

$$\frac{\varphi'(\lambda_i)}{\varphi(\lambda_i)} = \psi(\lambda_i) \tag{35}$$

l'expression précédente peut s'écrire :

$$\psi(\lambda_1) + \psi(\lambda_2) + \ldots + \psi(\lambda_n).$$

On doit donc avoir :

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n &= 0 \\ \psi(\lambda_1) + \psi(\lambda_2) + \ldots + \psi(\lambda_n) &= 0 \end{aligned} \tag{36}$$

En différentiant ces deux équations, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \psi'(\lambda_1)d\lambda_1 + \psi'(\lambda_2)d\lambda_2 + \ldots + \psi'(\lambda_n)d\lambda_n &= 0 \\ d\lambda_1 + d\lambda_2 + \ldots + d\lambda_n &= 0 \end{aligned}$$

Multiplions les deux membres de la deuxième par le multiplicateur indéterminé $2k$ et retranchons membre à membre. Nous obtenons :

$$(\psi'(\lambda_1) - 2k)\,d\lambda_1 + (\psi'(\lambda_2) - 2k)d\lambda_2 + \ldots + (\psi'(\lambda_n) - 2k)d\lambda_n = 0.$$

Les $\lambda$ étant supposés indépendants, cette équation ne peut avoir lieu que si ses divers termes sont nuls identiquement. On a par suite :

$$\psi'(\lambda) = 2k$$

d'où en intégrant

$$\psi(\lambda) = 2k\lambda$$

et en portant cette valeur dans (35)

$$\frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)} = 2k\lambda.$$

En intégrant de nouveau et en passant des logarithmes aux nombres, on trouve :

(37) $$\varphi(\lambda) = Ce^{k\lambda^2}$$

log C étant la constante d'intégration. Si l'on considère la probabilité d'une erreur comme une fonction décroissante de la grandeur de cette erreur, on peut remplacer dans (37) $k$ par $-h^2$. On a par suite

(38) $$\varphi(\lambda) = Ce^{-h^2\lambda^2}$$

On détermine C en remarquant que, les erreurs étant certainement comprises dans l'intervalle $-\infty$, $+\infty$, on doit avoir :

$$C\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\lambda^2}\,d\lambda = 1.$$

On déduit très aisément de là, en posant $\lambda h = t$ :

$$\frac{C}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = 1$$

d'où :

$$C = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

car on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$

La loi de fréquence des erreurs que nous cherchions est donc la suivante :

(39) $$\varphi(\lambda) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\lambda^2} = \frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-\lambda^2(x-x_0)^2}$$

le paramètre $h$ n'étant pas encore déterminé.



**17.** — La fonction $\varphi(\lambda)$ n'est acceptable que dans la mesure où est acceptable le postulat de la moyenne arithmétique d'où on l'a déduite. Réciproquement, la forme (39) de la fonction $\varphi(\lambda)$ conduit toujours à identifier la moyenne arithmétique des données fournies par l'observation avec la valeur inconnue de la grandeur observée.

Supposons, en effet, que l'on ait l'équation (36) et désignons par :

$$\varepsilon_1 = X - x_1$$
$$\varepsilon_2 = X - x_2$$

les erreurs commises dans la détermination de la grandeur X : la probabilité a priori pour que $n$ observations soient affectées respectivement des erreurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ est proportionnelle à :

$$e^{-h^2(\varepsilon^2_1+\varepsilon^2_2+\ldots+\varepsilon^2_n)}$$

Elle devient maximum lorsque :

$$\varepsilon^2_1 + \varepsilon^2_2 + \ldots + \varepsilon^2_n$$

est minimum. On en déduit aisément :

(40) $$X = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Cette équation (40) exprime, sous sa forme la plus simple, le principe fondamental de la méthode des moindres carrés, d'après lequel la valeur la plus avantageuse de la grandeur inconnue est celle qui rend minima la somme des carrés des erreurs apparentes.

On objecte au postulat de Gauss que la moyenne devrait coïncider non pas avec la valeur la plus probable, mais bien avec la valeur probable. Ce n'est en effet que dans le calcul de cette dernière qu'on tient compte de toutes les valeurs prises réellement par la variable considérée : la valeur la plus probable, au contraire, est définie seulement par la condition :

$$\varphi = \text{maximum}$$

et elle peut différer sensiblement de toutes les autres valeurs. Cette observation est certainement bien fondée : elle n'a toutefois qu'une

portée assez restreinte, ainsi que le montre l'étude de fonctions plus générales que celle de Gauss, basées sur l'identification de la moyenne avec la valeur probable [1].

On remarque aussi que la loi des erreurs est une loi continue, tandis que l'erreur ne peut varier que par valeurs discrètes et que cette loi donne comme possibles toutes les erreurs comprises entre $-\infty$ et $+\infty$, tandis qu'en fait l'erreur ne peut pas surpasser certaines limites.

Mais les unités d'un ordre inférieur à celui dont l'observateur tient compte sont d'habitude si petites qu'on peut les négliger sans inconvénient et la fonction $\varphi(\varepsilon)$ décroît avec une telle rapidité, dès que $\varepsilon$ a dépassé des valeurs assez petites, que l'on peut considérer aussi comme négligeables les probabilités correspondant à ces valeurs de $\varepsilon$.

Quoi qu'il en soit, la loi de Gauss est confirmée d'ordinaire par l'expérience : la répartition d'un grand nombre d'observations dont on connaît les erreurs, suivant la grandeur de ces erreurs, est sensiblement voisine de celle qui résulterait de la loi de Gauss.

On peut démontrer aussi que si l'erreur est le résultat d'un nombre infiniment grand de causes, la loi de fréquence des erreurs est précisément celle qui est définie par la fonction $\varphi(\varepsilon)$ de Gauss [2]. Cette dernière fonction peut précisément se déduire d'une hypothèse toute semblable à la précédente, celle que l'erreur totale résulte d'erreurs élémentaires

$$\varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon''', \ldots$$

susceptibles de prendre respectivement

$$n', n'', n''' \ldots$$

valeurs : $n'\, n''\, n''' \ldots$ exprime alors le nombre des valeurs possibles de l'erreur totale : $\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''' + \ldots$

(1) Poincaré. — *Calcul des Prob.*, pages 153-165 ; Bertrand. — *Calcul des Prob.* Chap. vii.

(2) Cf. Pizzetti. — *Loc. cit.* pages 123-133.



C'est de cette propriété que provient l'importance remarquable de la loi en question pour les applications du calcul des probabilités aux questions de statistique.

Un phénomène de statistique apparaît en effet comme la résultante d'un nombre très grand de phénomènes concernant les divers individus qui forment la collectivité étudiée : toutes les fois qu'il y a indépendance entre ces phénomènes individuels, on peut admettre qu'ils se combinent précisément comme des erreurs élémentaires ayant pour résultante l'erreur totale et qu'ils donnent lieu à une loi de variation identique à la loi de Gauss ou très voisine de cette loi.

**18.** — De l'égalité :

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2}$$

où l'on pose $\varepsilon = x - a$, $a$ désignant la vraie valeur, nous tirons

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{a-\delta}^{a+\delta} e^{-h^2(x-a)^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\delta} e^{-t^2} dt = \Phi(h\delta)$$

comme expression de la probabilité pour que l'observation fournisse une valeur de l'intervalle $(a - \delta, a + \delta)$ ou, en d'autres termes, pour que l'erreur commise appartienne à l'intervalle $(-\delta, +\delta)$. Si l'on suppose $\Phi(h\delta)$, c'est-à-dire P, constant, les quantités $h$ et $\delta$ varient en raison inverse l'une de l'autre ; or, plus l'intervalle $2\delta$ est petit, plus la précision des observations est grande : $h$ peut donc être pris comme mesure de la précision des observations.

Nous nous proposons de déterminer la valeur probable de l'erreur moyenne et du carré de cette erreur, en supposant la loi de Gauss valable. Par suite de la continuité de la fonction $\varphi$ et des définitions données précédemment, ces quantités s'exprimeront de la façon suivante :

$$\varepsilon^0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

et

$$m^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon.$$

En remplaçant $\varphi$ par sa valeur, nous obtenons :

$$\varepsilon^0 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \left[ \int_0^{\infty} t e^{-t^2} dt - \int_0^{-\infty} t e^{-t^2} dt \right] =$$

$$= \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \left[ \int_0^{\infty} t e^{-t^2} dt - \int_0^{\infty} z e^{-z^2} dz \right] = 0$$

où l'on pose $z = -t$.

$$m^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2}{h^2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{1}{2h^2}.$$

Le premier de ces résultats pouvait se prévoir aisément : en effet, la forme de $\varphi(\varepsilon)$ montre non seulement que la probabilité d'une erreur, maximum pour l'erreur zéro, décroît lorsque la grandeur de l'erreur croît, mais encore que des erreurs égales et de signes contraires présentent des probabilités égales. On a, en effet :

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi(-\varepsilon).$$

La moyenne arithmétique des erreurs et cette moyenne particulière que nous avons appelée valeur probable de l'erreur ne peuvent être égales qu'à zéro ([1]).

([1]) Au contraire, la valeur probable du module $|\varepsilon|$ de $\varepsilon$ n'est pas égale à zéro. Si on désigne cette valeur probable par $\delta$, on a :

$$\delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varepsilon| e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2}{h\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t e^{-t^2} dt = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}.$$

Cette quantité $\delta$ (erreur médiane = durchschnittlicher Fehler) a été introduite par Laplace comme mesure de la chance d'erreur relative à une série d'observations : Gauss lui préfère l'erreur moyenne « l'erreur médiane rendant plus difficiles les développements analytiques et conduisant à des résultats moins simples que l'erreur moyenne ». En réalité, l'erreur médiane qui peut remplir le même but que l'erreur moyenne, a sur cette dernière l'avantage de pouvoir être déterminée beaucoup plus facilement. Nous nous bornerons à énoncer, sans démonstration, les résultats suivants : l'erreur moyenne $m$ (ou



Le second résultat établit une relation très simple entre l'erreur moyenne et la constante de précision $h$. On a en effet :

$$h = \frac{1}{m\sqrt{2}}. \tag{41}$$

En portant cette valeur dans

$$\Phi(h\delta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int^{h\delta} e^{-t^2} dt \qquad (\S\ 4,\ n.\ 17)$$

et en posant $\delta = \lambda m$, on obtient la probabilité

$$\Phi\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int^{\frac{\lambda}{\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt$$

pour que l'erreur ne dépasse pas le multiple $\lambda m$ de l'erreur moyenne.

*moyenne quadratique*) et l'erreur médiane $\delta$, exprimées en fonction des erreurs apparentes $\lambda$ (seules connues), ont respectivement les valeurs suivantes :

$$m = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}} \qquad \delta = \frac{[|\lambda|]}{\sqrt{n(n-1)}}$$

où l'on a posé :

$$[\lambda] = \lambda_1 + \lambda_2 \ldots + \lambda_n$$
$$[\lambda\lambda] = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \ldots + \lambda_n^2.$$

L'intégrale :

$$J_r = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \varepsilon^r e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2}{h^r\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^r e^{-t^2} dt$$

($r$ entier) varie en raison inverse de la puissance $r^e$ de $h$ : on peut donc, d'une façon générale, la prendre, comme $h$ et comme les deux erreurs (moyenne et médiane), pour mesure de la précision des observations : la rapidité avec laquelle les sommes

$$\frac{[\varepsilon^r]}{n} \quad \text{ou} \quad \frac{[|\varepsilon|^r]}{n}$$

convergent vers $J_r$ n'est pas indépendante de $r$ et elle est maxima pour $r = 2$, ce qui suffit pour caractériser l'erreur moyenne comme l'expression la plus sûre de la précision des observations : mais il faut noter cependant que la rapidité de la convergence pour $r = 1$ est très voisine de celle qu'on a pour $r = 2$.

Pour cette dernière assertion, nous renvoyons le lecteur à *Pizzetti*, pages 256 et suivantes et, pour la démonstration des premières formules, à n'importe quel traité de calcul des probabilités.

On a

$$\text{pour } \lambda = 2 \qquad \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = 0.95346$$

$$3 \qquad \Phi\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 0.99729$$

$$4 \qquad \Phi\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right) = 0.99994.$$

En général,

$$\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt$$

est la probabilité pour que l'erreur ne dépasse pas $\frac{\gamma}{h}$ en valeur absolue.

La table I fournit les valeurs de la fonction de Gauss $\Phi(\gamma)$, pour des valeurs de l'argument $\gamma$, de dixième en dixième, depuis 0 jusqu'à 4,5.

**20.** — Le problème dont on s'est occupé au n° 17 peut être considéré comme un cas particulier du suivant : on a fait $n$ mesures d'une même grandeur X avec une précision variant d'une mesure à l'autre ; les constantes de précision étant respectivement $h_1, h_2, \ldots h_m$ et les valeurs mesurées $x_1, x_2, \ldots x_n$, on demande quelle est la valeur la plus probable $X_1$ de X.

Actuellement on doit rendre maxima la probabilitté

$$\frac{h_1 h_2 \ldots h_n}{\sqrt{\pi^n}} e^{-\sum_{i=1}^{i=n} h_i^2 \varepsilon_i^2} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_n$$

pour qu'on ait simultanément les erreurs

$$\varepsilon_1 = X - x_1, \ \varepsilon_2 = X - x_2, \ldots\ldots$$

et par suite on doit rendre minima l'expression :

$$\sum_{i=1}^{i=n} h_i^2 \varepsilon_i^2.$$



On déduit de là l'équation :

$$\sum_{i=1}^{i=n} h_i^2 (X_1 - x_i) = 0$$

d'où

$$(42) \qquad X_1 = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} h_i^2 x_i}{\sum_{i=1}^{i=n} h_i^2}$$

Comme cas particulier, si l'on a $h_1 = h_2 = \ldots = h_n$ on retrouve la formule connue :

$$X_1 = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i}{n}.$$

Les quantités $h_1^2, h_2^2, \ldots h_n^2$ qui figurent dans la formule (42) ou, plus généralement, des quantités quelconques $p_1, p_2, \ldots p_n$ proportionnelles à $h_1^2, h_2^2, \ldots h_n^2$, ont reçu le nom de *poids*. On voit aisément qu'une observation de poids $p$ équivaut à $p$ observations de poids un : c'est là une deuxième définition plus simple du poids lui-même.

Soient $h$ et $h'$ les constantes de précision de deux observations, $p$ et $p'$ leurs poids, $m$ et $m'$ leurs erreurs moyennes. De l'égalité

$$p : p' = h^2 : h'^2$$

on déduit, au moyen de la relation (41) :

$$p : p' = m'^2 : m^2.$$

Les poids sont donc inversement proportionnels aux carrés des erreurs moyennes. Et en prenant $p$ comme unité de poids, on a

$$(43) \qquad m' = \frac{m}{\sqrt{p'}}.$$

L'erreur moyenne $m'$ d'une série d'observations de poids $p'$ est égale au quotient de la division par $\sqrt{p'}$ de l'erreur moyenne correspondant à l'unité de poids : on déduit de là que des observations de précision différente deviennent toutes des observations de poids 1, lorsqu'on multiplie chaque résultat par la racine carrée de son poids et on peut toujours supposer que toutes les observations ont la même précision.

**21.** — Énonçons maintenant le problème fondamental dans l'étude de la méthode des moindres carrés : des observations ont fourni les valeurs $l_1, l_2, \ldots l_n$ de $n$ fonctions de forme déterminée :

$$(44) \qquad \begin{cases} f_1(x_1, x_2 \ldots, x_m) = l_1 \\ f_2(x_1, x_2 \ldots, x_m) = l_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_n(x_1, x_2 \ldots, x_m) = l_n \end{cases}$$

$x_1, x_2, \ldots x_m$ étant $m$ variables indépendantes. On suppose $n > m$ et on veut déterminer la valeur des inconnues elles-mêmes.

Sans restreindre la généralité du problème, on peut admettre :

*a*) Qu'aux diverses équations du système (44) correspond une égale précision. S'il n'en était pas ainsi, il suffirait, d'après ce qu'on vient de voir, de multiplier chacune des équations par la racine carrée du poids correspondant.

*b*) Que toutes les équations du système sont linéaires.

Supposons qu'elles ne le soient pas. Choisissons d'une façon convenable un nombre d'équations égal au nombre des inconnues et soient $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$ leurs racines : ce seront des valeurs approchées des inconnues. Les corrections $\xi_1 = x_1 - x_1^0$, $\xi_2 = x_2 - x_2^0$ qu'on doit faire subir aux $x^0$ pour obtenir le minimum peuvent être choisies assez petites pour que, dans le développement de $f_i(x_1, x_2, \ldots x_m)$ en série de Taylor, on puisse négliger tous les termes contenant les $\xi$ à un degré supérieur au premier. On a



alors :

$$f_i(x_1, x_2 \ldots x_m) = f_i(x_1^0, x_2^0 \ldots x_m^0) + \\ + \xi_1 \frac{\partial f_i(x_1^0, x_2^0 \ldots x_m^0}{\partial x_1^0} + \\ + \xi_2 \frac{\partial f_i(x_1^0, x_2^0 \ldots x_m^0)}{\partial x_2^0} + \ldots + \xi_m \frac{\partial f_i(x_1^0, x_2^0 \ldots x_m^0)}{\partial x_m^0}.$$

En posant :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1^0} = a_i, \ \frac{\partial f_i}{\partial x_2^0} = b_i \ldots, \ f_i(x_1^0, x_2^0, \ldots x_m^0) = A_i$$

on peut écrire, au lieu de l'équation :

$$f_i(x_1, x_2, \ldots x_n) = l_i$$

l'équation suivante :

$$A_i + a_i\xi_1 + b_i\xi_2 + \ldots = l_i$$

qui est linéaire.

**22.** — Le problème est donc toujours ramené à la résolution d'un système de $n$ équations, linéaires et de même poids, à $m$ inconnues ($n > m$) :

$$(45) \qquad \begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + \ldots = l_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + \ldots = l_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_nx_1 + b_nx_2 + \ldots = l_n \end{cases}$$

On demande de déterminer les valeurs $X_1, X_2, \ldots X_m$ qu'il faut donner aux inconnues pour que la somme des carrés des erreurs soit minimum.

On doit avoir :

$$\sum_{i=1}^{i=n} (a_ix_1 + b_ix_2 + \ldots - l_i)^2 = \Psi(x_1, x_2 \ldots x_m) = \text{minimum}.$$

Ceci a lieu évidemment pour les valeurs des X vérifiant simultanément les équations :

$$(46) \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} = 0 \ldots \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial x_m} = 0.$$

C'est un système de $m$ équations à $m$ inconnues : le problème est donc complètement déterminé.

La méthode des *éliminations successives*, proposée par Gauss pour la résolution du système (46), est appliquée assez fréquemment dans la pratique : elle consiste à résoudre la première équation du système (46) par rapport à l'une des inconnues, à remplacer cette inconnue par la valeur ainsi trouvée dans les $m - 1$ autres équations et à appliquer successivement la méthode aux nouveaux systèmes de $m - 1$, $m - 2$, ... 2, 1 équations à $m - 1$, $m - 2$, ... 2, 1 inconnues auxquels est ainsi ramené le système primitif. Bornons-nous à rappeler ici que l'introduction des notations de Gauss

$$a_1 + a_2 + \dots a_n = [a]$$
$$a^2_1 + a^2_2 + \dots a^2_n = [aa]$$
$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots a_n b_n = [ab]$$

permet de simplifier beaucoup la forme des coefficients des équations (46) : pour l'exécution pratique des calculs, qui ne sort pas du domaine des mathématiques élémentaires, mais qui est assez laborieuse si $m$ et $n$ n'ont pas des valeurs très petites, nous renverrons à un traité quelconque relatif à la méthode des moindres carrés, par exemple au traité court et élémentaire de Forti [1].

### VI. — Expression approchée de $\frac{s!}{\alpha!\,(s-\alpha)!}\,p^\alpha q^{s-\alpha}$

**23.** — Supposons que les hypothèses énoncées au n° 10 subsistent. On a alors :

$$sp = \text{valeur la plus probable} = \text{valeur probable}$$
$$\sqrt{spq} = m = \text{erreur moyenne}$$

[1] *Il metodo dei minimi quadrati e la teorica degli errori*, Hœpli, 1890, p. 49 et suiv. ; pour la bibliographie, voir : *Bauschinger, Ausgleichungsrechnung*, dans l'*Encyclopadie der math. Wiss.* ID 2 et *Pizzetti loc. cit.*



Posons :

$$h = \frac{1}{m\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2spq}}$$

Nous nous proposons de démontrer qu'on peut prendre les quantités

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi spq}}\,e^{-\frac{x^2}{2spq}} = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2m^2}} = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2x^2}$$

et

$$\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\gamma e^{-t^2}\,dt$$

comme expressions respectives des probabilités pour que, sur $s$ épreuves répétées, l'événement E, de probabilité constante $p$, ait lieu un nombre de fois égal à $sp + x$ et pour que cet événement ait lieu un nombre de fois compris entre $sp - \frac{\gamma}{h}$ et $sp + \frac{\gamma}{h}$, l'approximation étant d'autant plus grande que $s$ est plus grand.

Cette démonstration est destinée à montrer le lien qui existe entre la loi des erreurs de Gauss et la théorie des épreuves répétées : elle nous servira en même temps à établir des formules qui permettront d'effectuer le calcul des probabilités ainsi définies plus rapidement qu'à l'aide des termes, ou des sommes de termes, du développement de $(p + q)^s$.

**23** *bis.* — Nous supposons connue et démontrée la formule asymptotique de Stirling (voir la *Note* des pages 50 et suivantes) :

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

Supposons $s$, $\alpha$ et $s - \alpha$ suffisamment grands,

(47) $$\alpha = sp + \lambda\sqrt{s}$$

(48) $$\frac{\lambda\sqrt{s}}{sp} < 1$$

et $\lambda$ fini, de sorte que l'on puisse, sans erreur sensible, supposer que

$$\frac{\alpha}{sp} = 1 + \frac{\lambda}{p\sqrt{s}} \tag{49}$$

est remplacé par l'unité. Par suite de l'égalité

$$p + q = 1$$

l'équation (47) donne :

$$s - \alpha = sq - \lambda\sqrt{s} \tag{50}$$

et l'équation

$$u_\alpha = \frac{s!}{\alpha!\,(s-\alpha)!}\,p^\alpha q^{s-\alpha} \tag{51}$$

devient :

$$\left\{\begin{aligned} u_\alpha &= \frac{s^s e^{-s}\sqrt{2\pi s}\,p^\alpha q^{s-\alpha}}{\alpha^\alpha\sqrt{2\pi\alpha}\,e^{-\alpha}\,e^{-s+\alpha}\,(s-\alpha)^{s-\alpha}\sqrt{2\pi(s-\alpha)}} = \\ &= \frac{s^s p^\alpha q^{s-\alpha}}{\alpha^\alpha\,(s-\alpha)^{s-\alpha}}\sqrt{\frac{s}{2\pi\alpha(s-\alpha)}} = \\ &= \left(\frac{sp}{\alpha}\right)^\alpha\left(\frac{sq}{s-\alpha}\right)^{s-}\sqrt{\frac{s}{2\pi\alpha(s-\alpha)}} \end{aligned}\right. \tag{52}$$

Mais, par suite des conventions précédentes, $\frac{\alpha}{sp}$ et $\frac{s-\alpha}{sq}$ tendent vers un lorsque $s$ croît indéfiniment et, par conséquent, $\frac{\alpha}{s}$, $\frac{s-\alpha}{s}$ tendent respectivement vers $p$ et $q$ et $\frac{s}{\alpha}$, $\frac{s}{s-\alpha}$ vers $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{q}$. Puisque l'on a

$$\frac{s}{2\pi\alpha(s-\alpha)} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{s}{\alpha}\,\frac{1}{s}\,\frac{s}{s-\alpha}$$

le radical qui figure dans l'expression (52) devient :

$$\sqrt{\frac{s}{2\pi pqs^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi spq}}.$$



En désignant par $\log x$ le logarithme naturel de $x$, l'équation (52) donne :

$$\left\{\begin{aligned} \log u_\alpha &= \log\frac{1}{\sqrt{2\pi spq}} + \alpha\log\frac{sp}{\alpha} + (s-\alpha)\log\frac{sq}{s-\alpha} = \\ &= \log\frac{1}{\sqrt{2\pi spq}} - \alpha\log\frac{\alpha}{sp} - (s-\alpha)\log\frac{s-\alpha}{sq} \end{aligned}\right. \tag{53}$$

et, en remplaçant $\frac{s}{\alpha}$, $\frac{s-\alpha}{sq}$ par les valeurs qu'on tire des équations (49) et (50),

$$\begin{aligned} \log u_\alpha = \log\frac{1}{\sqrt{2\pi spq}} &- (sp + \lambda\sqrt{s})\log\left(1 + \frac{\lambda}{p\sqrt{s}}\right) - \\ &- (sq - \lambda\sqrt{s})\log\left(1 - \frac{\lambda}{q\sqrt{s}}\right) \end{aligned}$$

Remplaçons $\log\left(1 + \frac{\lambda}{p\sqrt{s}}\right)$ et $\log\left(1 - \frac{\lambda}{q\sqrt{s}}\right)$, dans l'hypothèse où $s$ est très grand, par les valeurs données par les premiers termes du développement $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$ Nous obtenons :

$$\left\{\begin{aligned} &(sp + \lambda\sqrt{s})\log\left(1 + \frac{\lambda}{p\sqrt{s}}\right) = \\ &= (sp + \lambda\sqrt{s})\left(\frac{\lambda}{p\sqrt{s}} - \frac{\lambda^2}{2p^2s} + \frac{\lambda^3}{3p^3s\sqrt{s}}\ldots\right) \end{aligned}\right. \tag{54}$$

$$\left\{\begin{aligned} &(sq - \lambda\sqrt{s})\log\left(1 - \frac{\lambda}{q\sqrt{s}}\right) = \\ &= (sq - \lambda\sqrt{s})\left(-\frac{\lambda}{q\sqrt{s}} - \frac{\lambda^2}{2q2s} - \frac{\lambda^3}{3q^3s\sqrt{s}}\ldots\right) \end{aligned}\right. \tag{55}$$

Négligeons les termes qui contiennent au dénominateur $\sqrt{s}$ ou $s$, termes qui tendent vers zéro lorsque $s$ croît indéfiniment : les

expressions (54) et (55) se réduisent alors respectivement à

$$\lambda\sqrt{s}+\frac{\lambda^2}{2p} \qquad \text{et à} \qquad -\lambda\sqrt{s}+\frac{\lambda^2}{2q}$$

et leur somme est égale à :

$$\frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)=\frac{\lambda^2}{2pq}.$$

Par suite l'équation (53) devient

$$\log u_\alpha = \log\frac{1}{\sqrt{2\pi spq}}-\frac{\lambda^2}{2pq}$$

d'où ;

$$(56) \qquad u_\alpha=\frac{1}{\sqrt{2\pi spq}}e^{-\frac{\lambda^2}{2pq}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi spq}}e^{-\frac{x^2}{2spq}}=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2h^2}$$

en posant

$$x=\lambda\sqrt{s}$$

Si dans l'équation (56) on donne à $x$ et à $\alpha$ les valeurs $x=\lambda\sqrt{s}=0$, $\alpha=sp$, on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi spq}}$$

comme expression de la probabilité correspondant au terme maximum du développement de $(p+q)^s$ : on voit aisément qu'elle représente une fraction de l'unité d'autant plus petite, que $s$ est plus grand.

**24.** — Si l'on pose, comme précédemment,

$$\alpha = sp+\lambda\sqrt{s}$$

on déduit de l'équation (56) l'expression

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi pq}}\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} e^{-\frac{\lambda^2}{2pq}}\,d\lambda$$

de la probabilité pour que l'on ait : $\lambda_0<\lambda<\lambda_1$.



Soit $F(\varepsilon, s)$ la probabilité pour que l'on ait :

$$sp(1-\varepsilon)<\alpha<sp(1+\varepsilon).$$

Puisque l'on a :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi pq}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2pq}}\,d\lambda=1$$

on peut toujours choisir $\lambda$ de manière que l'on ait :

$$(57) \qquad 1-\frac{1}{\sqrt{2\pi pq}}\int_{-\lambda}^{+\lambda} e^{-\frac{\lambda^2}{2pq}}\,d\lambda<\frac{\eta}{2}$$

$\eta$ étant un nombre aussi petit qu'on le veut.

On a aussi :

$$\lambda<\varepsilon p\sqrt{s}$$

et par suite :

$$F(\varepsilon, s)>F\left(\frac{\lambda}{p\sqrt{s}}, s\right)$$

Et puisque

$$\lim_{s=\infty} F\left(\frac{\lambda}{p\sqrt{s}}, s\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi pq}}\int_{-\lambda}^{+\lambda} e^{-\frac{\lambda^2}{2pq}}\,d\lambda$$

on peut aussi déterminer $s$ de manière que l'on ait :

$$(58) \qquad \left|F\left(\frac{\lambda}{p\sqrt{s}}, s\right)-\frac{1}{\sqrt{2\pi pq}}\int_{-\lambda}^{+\lambda} e^{-\frac{\lambda^2}{2pq}}\,d\lambda\right|<\frac{\eta}{2}$$

et, en additionnant membre à membre les inégalités (57) et (58), on obtient :

$$1-F(\varepsilon, s)<\eta \text{ [1]}.$$

*La probabilité pour que $\alpha$ soit compris entre $sp(1-\varepsilon)$ et*

[1] Poincaré. — *Loc. cit.*, pages 81-73.

*$sp(1+\varepsilon)$ tend vers l'unité lorsque s augmente indéfiniment, et cela quelque petit que soit $\varepsilon$.*

Résultat que nous avions déjà obtenu d'une autre façon.

## NOTE

**1.** — En remplaçant $t^2$ par $x$ dans

$$(1) \qquad \int_0^\infty t^r e^{-t^2}\, dt$$

nous obtenons :

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty x^{\frac{r-1}{2}} e^{-x}\, dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)$$

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}\, dx \qquad (n > 0)$$

désignant l'intégrale connue appelée intégrale eulérienne de deuxième espèce.

Par suite l'intégrale (1) est égale

| | | | |
|---|---|---|---|
| pour | $r = 1$ | à | $\frac{1}{2}\Gamma(1) = \frac{1}{2}$ |
| pour | $r = 2$ | à | $\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}$ |
| pour | $r = 3$ | à | $\frac{1}{2}\Gamma(2) = \frac{1}{2}$ |
| pour | $r = 4$ | à | $\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}$ |

**2.** — On a aussi :

$$(2) \qquad \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \int_0^\gamma e^{-t^2}\, dt + \int_\gamma^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$



On détermine la valeur de l'intégrale

$$(3) \qquad \Psi(\gamma) = \int_0^\gamma e^{-t^2}\, dt$$

et par suite celle de l'intégrale

$$(4) \qquad \chi(\gamma) = \int_\gamma^\infty e^{-t^2}\, dt$$

soit par des quadratures, soit par l'intégration de séries.

Le développement de $e^{-t^2}$ en série de Mac-Laurin et l'intégration terme à terme de celle-ci, entre les limites 0 et $\gamma$, donne par exemple :

$$(5) \qquad \int_0^\gamma e^{-t^2} dt = \gamma - \frac{\gamma^3}{3} + \frac{1}{2!}\frac{\gamma^5}{5} - \frac{1}{3!}\frac{\gamma^7}{7} + \ldots$$

Toutefois, le second membre de (5) converge trop lentement, déjà à partir de $\gamma = 2$, pour qu'on puisse l'utiliser dans la pratique.

On a aussi, en développant $\chi(\gamma)$ en série de Taylor :

$$(6) \qquad \chi(\gamma) - \chi(\gamma + r) = re^{-\gamma^2}\left\{1 - \gamma r + r^2\frac{2\gamma^2 - 1}{3} - r^3\frac{2\gamma^3 - 3\gamma}{6} + \ldots\right\}$$

relation dont s'est servi Kramp (*Analyse des réfractions astronomiques et terrestres*, Strasbourg, 1799) qui a donné une table des valeurs de la fonction $\chi$ correspondant à $r = 0{,}01$, en s'arrêtant au quatrième terme du développement.

On a de même, en faisant successivement les substitutions $t^2 = x + \gamma^2$, $e^{-x} = y$ :

$$(7) \qquad \chi(\gamma) = \int_\gamma^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2}e^{-\gamma^2}\int_0^\infty \frac{e^{-x}\, dx}{\sqrt{\gamma^2 + x}} = \frac{1}{2}e^{-\gamma^2}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{\gamma^2 - \log y}}$$

d'où :

$$(8) \qquad \int_\gamma^\infty e^{-t^2} dt = \frac{e^{-\gamma^2}}{2\gamma}\left(1 - \frac{1}{2\gamma^2} + \frac{1.3}{(2\gamma^2)^2} - \frac{1.3.5}{(3\gamma^2)^3} + \ldots\right).$$

La série (8) est divergente pour $\gamma < 4$.

Pour des renseignements plus détaillés et pour certains autres développements en série, nous renvoyons le lecteur à RADAU, *Tables de l'intégrale* $\Psi(z) = e^{-z^2} \int_z^\infty e^{-t^2 dt}$ [1]. Les tables de Radau s'étendent aux valeurs de $\gamma$ comprises entre 0 et 10 et fournissent la valeur de la fonction $\Psi(z)$ pour des valeurs de $z$ variant de millième en millième.

**3.**— On démontre (voir par ex. SERRET, *Calc. différ. et intégral* vol. II, n° 536) que l'on a :

$$\Gamma(n+1) = n! = \sqrt{2\pi}\, e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} (1+\varepsilon) \qquad \lim_{n=\infty} \varepsilon = 0.$$

On peut démontrer d'une façon analogue la relation :

$$\log \Gamma(n+1) = \frac{1}{2} \log 2\pi + n + \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n +$$
$$+ \sum_{r=0}^{r=\infty} \left[\left(n + r + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{n+r}\right) - 1\right]$$

relation énoncée pour la première fois par STIRLING et valable pour toutes les valeurs de $x$ sauf la valeur zéro et les valeurs entières négatives [2]

On peut aussi obtenir cette formule comme cas particulier de la formule de sommation d'Euler [3].

L'expression de $n!$ que nous avons employée dans le texte peut

[1] *Annales de l'Observatoire de Paris*, XVIII, 1885.

[2] Pour la bibliographie, voir BRUNEL, *Bestimmte Integrale* dans l'*Encyklop. der math. Wissenchaften*, II, A3 et MEYER-(DIRICHLET), *Vorles. über die Theorie der best. Integr. zwischen reellen Grenzen*. Leipzig, 1871, page 143.

[3] Voir par ex. *Lehrbuch der Differenzenrechnung* de SELIWANOFF (Leipzig, 1904, pages 59 et suiv.) et MARKOFF.



s'obtenir, beaucoup plus simplement, en partant des inégalités

$$(9) \qquad e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1 + \frac{1}{12n(n+1)}} \text{ [1]}.$$

En posant :

$$a_n = \frac{n!\, e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$$

on a :

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e}$$

et, à cause des inégalités (9) :

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}}$$

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a_{n+1} e^{-\frac{1}{12(n+1)}} < \ldots < a_{n+1} < a_n$$

Il résulte de ces inégalités que les nombres $a_n e^{-\frac{1}{12n}}$ croissent en même temps que $n$ et restent inférieurs aux nombres $a_n$ qui, au contraire, décroissent lorsque $n$ croît : les nombres $a_n e^{-\frac{1}{12n}}$ et les nombres $a_n$ ont donc des limites finies, nécessairement égales entre elles, et si l'on pose :

$$\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} a_n e^{-\frac{1}{12n}} = a$$

on a, quel que soit $n$,

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a < a_n ; \qquad a = a_n e^{-\frac{\theta}{12n}}, \qquad (0 < \theta < 1)$$

et

$$(10) \qquad n! = a n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{\theta}{12n}}$$

[1] CESARO. — *Corso di analisi algebrica*. Turin, 1884, pages 270 et 480.

Mais on a aussi :

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n-1}{2n} = \lim_{n=\infty} \frac{2n}{1} \left( \frac{2.4.6 \ldots 2n}{1.3.5.7 \ldots (2n-1)} \right)^2$$

et, à cause de la relation (10) :

$$\frac{2.4.6 \ldots 2n}{1.3.5 \ldots (2n-1)} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} = a \sqrt{\frac{n}{2}} e^{\frac{4\theta - \theta}{224n}} \quad (0 < \theta < 1, 0 < \theta' < 1)$$

On en déduit :

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n=\infty} \sqrt{\frac{1}{2n}}\, a \sqrt{\frac{n}{2}}\, e^{\frac{4\theta - \theta'}{24n}} = \frac{a}{2}$$

$$a = \sqrt{2\pi}$$

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n + \frac{\theta}{12n}}$$

---

# CHAPITRE II

—

## THÉORIE STATISTIQUE DE LA MORTALITÉ

### I. — Axiomes et fonctions fondamentales

**1.** — L'application du calcul des probabilités à la théorie statistique de la mortalité est basée sur certains axiomes, dont nous rappellerons les énoncés sous la forme que leur a donnée M. Bohlmann [1].

Axiome I. — Soit $(x)$ un individu d'âge $x$, appartenant à une collectivité : la probabilité pour que $(x)$ soit encore en vie à l'âge $x + m$ s'exprime par une fonction déterminée $p(x, x + m)$ des variables $x$ et $x + m$, définie pour toutes les valeurs de $x$ et de $m$ qui ne dépassent pas une certaine valeur égale à la durée maxima de la vie humaine.

Axiome II. — Soient $p(x, x + m)$ et $p'(y, y + n)$ les probabilités respectives pour que $(x)$ et $(y)$ soient encore en vie aux âges $x + m$, $y + n$. Quelles que soient les valeurs positives de $x$, $y$, $m$, $n$, les deux probabilités sont indépendantes [2] toutes les fois qu'elles sont relatives à deux individus différents.

[1] *Loc. cit.*, page 860.
[2] Dans le sens qui a été défini au n° 3 du Ch. I.

Par définition, une collectivité Γ sera dite *à risques semblables* si l'on a, pour deux individus quelconques de cette collectivité :

$$p(x, x+m) = p'(y, y+n)$$

chaque fois que l'on a : $x = y$, $m = n$.

Le but de la recherche statistique est de fournir les valeurs les plus acceptables des probabilités de survie ainsi définies et d'autres fonctions liées à ces probabilités par des relations analytiques déterminées. Elle sert en outre à démontrer la légitimité des axiomes énoncés plus haut et aussi à examiner la valeur, au point de vue des applications, des résultats obtenus par le calcul, en partant de l'hypothèse d'une probabilité de survie, fonction de l'âge et de la durée de survie.

**2.** — Des axiomes précédents résulte avant tout la conséquence suivante :

Toute collectivité Γ à risques semblables possède une loi (hypothétique) de survie : c'est-à-dire qu'à cette collectivité correspond une fonction $l_x$ de la variable continue $x$, appelée *nombre des individus en vie à l'âge x*, et qui possède les propriétés suivantes :

1. — $l_x$ n'est déterminé qu'à un facteur près, constant, $k$.
2. — $l_x$ ne croît jamais lorsque $x$ croît.
3. — $l_x$ n'est jamais négatif.
4. — On a :

$$p(x, x+m) = \frac{l_{x+m}}{l_x}$$

On a, en effet, en supposant $0 < n < m$ :

$$p(x, x+m) = p(x, x+n)\, p(x+n, x+m)$$

d'où :

$$(1) \qquad p(x+n, x+m) = \frac{p(x, x+m)}{p(x, x+n)}.$$



C'est la fonction $Kp(x, a)$ de $x$ et de $a$ que nous désignons par $l_a$ et que nous appelons nombre des vivants à l'âge $a$.

Pour $n = 0$, l'équation (1) devient

$$p(x, x+m) = \frac{l_{x+m}}{l_x}$$

$$l_{x+m} = l_x p(x, x+m)$$

et comme $p(x, x+m)$ est inférieur ou égal à 1, on a bien :

$$l_x \geqslant l_{x+m} \text{ (2e propriété).}$$

Il résulte de même de l'inégalité $p(x, x+m) \geqslant 0$ que $l_x$ conserve un signe constant. Enfin, pour certain âge extrême $a$, on a :

$$p(\omega, \omega+m) = 0$$

d'où

$$l_{\omega+m} = 0$$

et l'inégalité $l_\omega > l_{\omega+m}$ montre que l'on a : $l_\omega > 0$ et par suite $l_x > 0$ (3e propriété).

## II. — Détermination des probabilités de décès et de survie.

**3.** — Soient L individus ayant exactement l'âge $x$ : supposons qu'on connaisse la fonction

$$p(x, x+m) = p$$

dont nous admettons l'existence : on demande quel est le nombre probable des survivants à l'âge $x+m$. C'est d'après une définition connue :

$$\sum_{n=0}^{n=L} n\varphi(n)$$

$\varphi(n)$ désignant la probabilité pour que le nombre des survivants soit $n$. On a, par suite des relations bien connues et en vertu de

l'axiome II :

$$\varphi(n) = \binom{L}{n} p^n (1 - p)^{L-n}$$

et la valeur probable cherchée est :

$$\sum_{n=0}^{n=L} n \binom{L}{n} p^n (1 - p)^{L-n} = Lp$$

(Cf. Ch. I, n$^{os}$ 6 (6) et 10 (21)).

Cette valeur coïncide avec le nombre le plus probable des survivants. On a de même :

$$L(1 - p) = Lq$$

pour le nombre probable des décès se produisant à un âge de l'intervalle $(x, x + m)$ si $q = 1 - p$ exprime la probabilité pour que $(x)$ meure avant d'avoir atteint l'âge $x + m$.

Si l'on désigne par D le nombre des individus, appartenant au groupe des L personnes, décédés avant d'avoir atteint l'âge $x + m$, la probabilité pour que la différence $| D - L_q |$ soit inférieure à une quantité donnée aussi petite qu'on le veut, sera d'autant plus voisine de la certitude que L sera plus grand (théorème de Bernoulli). Si L est infiniment grand, on a :

$$D = Lq$$

d'où l'on déduit

(2) $$q = \frac{D}{L}$$

(3) $$p = 1 - q = \frac{L - D}{L}.$$

Pour des valeurs finies de L, les valeurs de $q$ et de $p$ ainsi trouvées peuvent être considérées, dans une première approximation, comme les probabilités *a priori* pour que $(x)$ meure à un âge de l'intervalle $(x, x + m)$ et pour qu'il dépasse l'âge $x + m$.



## III. — Tables de survie

**4.** — Le problème statistique de la détermination des fonctions $q(x, x + m)$ et $p(x, x + m)$ est ainsi ramené à la détermination du nombre de survivants à l'âge $x + m$ qu'il y a dans un groupe de L individus dont l'âge est exactement $x$.

D'une façon plus précise, soit $L(x)$ un certain nombre d'individus ayant exactement l'âge $x$, $L(x + m)$ le nombre des survivants à l'âge $x + m$, $\omega$ un certain âge à partir duquel on a

$$L(x + m) = 0 :$$

il s'agit de déterminer la suite des valeurs $L(x + m)$, pour les valeurs positives de $m$ inférieures ou égales à $\omega - x$, Une pareille suite constitue une *table de survie*. Le problème consiste donc dans la construction d'une table de survie.

On peut supposer :

ou bien que les $L(x)$ survivants à l'âge $x$ appartiennent, pour les différentes valeurs de $x$, à une même génération, c'est-à-dire à un groupe déterminé d'individus nés pendant une période déterminée ;

ou bien qu'il n'en soit pas ainsi.

Dans le premier cas, la statistique a pour objet de relever, sur un certain ensemble $L(0)$ de nouveaux-nés, le nombre de survivants aux divers âges. Le relevé a lieu, dans la pratique, par âges successifs exprimés par des nombres entiers $x$ d'années. Il peut consister à établir directement, au moyen de recensements successifs, le nombre des survivants aux âges 1, 2,...; ou bien, au contraire, à relever le nombre $D(x)$ des décès survenus à un âge de l'intervalle $(x, x + 1)$ : on peut en déduire les quantités $L(x)$.

On a en effet :

$$\begin{aligned} D(x) &= L(x) - L(x + 1) \\ D(x + 1 &= L(x + 1) - L(x + 2) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ D(x + m - 1) &= L(x + m - 1) - L(x + m) \\ D(x) + D(x + 1) + \ldots + D(x + m - 1) &= L(x) - L(x + m) \end{aligned}$$

et, puisque l'on a, pour $x + m > \omega$

$$L(x + m) = D(x + m) = D(x + m + 1) = \ldots = 0$$

on peut écrire :

$$\sum_{m=0} D(x + m) = L(x)$$

Laissons de côté les graves difficultés qui s'opposent dans la pratique à un relevé exact de cette nature, à cause surtout de l'influence perturbatrice des phénomènes d'émigration et d'immigration : mais remarquons que, si la connaissance de la loi réelle d'élimination d'une génération déterminée peut avoir une importance théorique remarquable pour le statisticien et le biologiste, elle n'a qu'une valeur très restreinte au point de vue des applications. Les probabilités définies par les quotients (2) et (3) se rapportent en effet, dans ce cas, à une génération passée et il est tout à fait douteux qu'on puisse les prendre comme éléments de mesure de la mortalité actuelle.

**6.** — Dans le second cas, on a une table de mortalité qui ne ressemble à la table ainsi définie qu'au point de vue de la forme. Elle donne la loi d'élimination d'une collectivité hypothétique dont les probabilités de décès seraient celles de différentes générations d'individus en vie au même moment. La construction de cette table se ramène à la détermination des probabilités de décès aux divers âges, à l'aide d'observations faites toutes au même moment : on en déduit le nombre de survivants à ces mêmes âges, en se servant de la relation établie précédemment :

$$l_x = l_0 p(0, x)$$

Remarquons que, pour $0 < x' < x$, on a :

$$p(0, x) = p(0, x')\, p(x', x)$$



Désignons par $[x]$ le plus grand entier contenu dans $x$ et posons :

$$x = [x] + \theta$$
$$0 < \theta < 1$$

On aura alors :

$$l_x = l_0 p([x], x) \prod_{x_1=1}^{x_1=[x]} p(x_1 - 1, x_1)$$

où $l_0$ désigne le nombre arbitraire des individus qu'on suppose avoir l'âge zéro.

Les deux tables de survie relatives à « une génération déterminée » et à « des individus en vie au même moment » ne coïncident que si on suppose les lois de la mortalité absolument invariables dans le temps et qu'on ait éliminé l'influence des émigrations et des immigrations.

La différence entre les deux tables n'a pas toujours été et n'est pas toujours remarquée explicitement : elle n'en existe pas moins et elle est importante. On a cru très souvent pouvoir obtenir une table de la première ou de la deuxième catégorie par l'application simultanée de méthodes qui ne s'appliquaient au contraire qu'à une seule de ces catégories [1].

## IV. — Théorie formelle de la population

**7.** — Nous nous demandons comment on peut arriver à connaître le nombre L $(x)$ des individus ayant exactement l'âge $x$ ($x$ étant exprimé par un nombre entier d'années) et le nombre D $(x)$

[1] Cf. Zeuner. — *Abhandlungen aus der Math. Stat.*, Leipzig 1869, pages 53, 54. C'est à Zeuner qu'appartiennent les deux dénominations introduites plus haut : « *Sterbetafel einer bestimmten Generation, Sterbetafel gleichzeitig Lebender* ».

des individus appartenant à l'ensemble $L(x)$, décédés à un âge de l'intervalle $(x, x+1)$.

Que le relevé des nombres $L(x)$ ne puisse être effectué directement, cela résulte de cette remarque hien simple que le nombre des nouveau-nés à un instant donné est zéro ou un, même pour une population très grande. On obtient ainsi zéro ou un comme nombre des individus ayant exactement l'âge $x$, à la fin de la période $x$. L'égalité parfaite des âges des divers membres du groupe $L(x)$ constitue donc une condition qui n'est jamais remplie : par suite, le relevé statistique ne peut donner que le nombre des individus qui ont, à un instant donné, un âge compris entre des limites également données, ou qui meurent, pendant une période donnée, à un âge compris entre ces limites.

L'objet de la théorie formelle de la population est la détermination et la critique des méthodes qui permettent de déduire des données précédentes les probabilités de décès : d'une façon plus précise, c'est la recherche des rapports qui existent entre des données statistiques définies de diverses façons (moment de la naissance ou de la mort, âge, etc.). Le but final de la théorie est le suivant : supposons une collectivité d'individus assujettie pour l'instant à une seule condition, que ses divers membres sont soumis à un certain changement d'état ayant lieu à l'époque $z$, pour un membre d'âge $x$ né à l'époque $y$ : on se propose d'exprimer l'état de la collectivité considérée dans son ensemble, tel qu'il résulte des changements d'états particuliers à chacun des membres, changements qui, pour chacun d'eux, peuvent arriver ou ne pas arriver, ou encore avoir lieu à des âges et à des époques différents [1].

[1] C'est là, en dernière analyse l'objet de toute recherche concernant la théorie statistique de la population, du moins si on assigne comme but à cette théorie, avec Lexis : « *Die Grundsätze aufzusetzen, nach denen die (se) Massenerscheinungen, die Gesammtergebnisse von zahlreichen gewissermassen molecularen Einselprocessen, zu beobachten, und wissenschaftlich zu bewältigen sind* ». Cf. : *Einleitung in die Theorie der Bevolkerungstatistik*. Strasbourg, 1873.



Le cas le plus simple de cette théorie est celui où l'on considère un changement d'état unique. On peut supposer au contraire que l'on considère autant de séries de valeurs $z_1, z_2, \ldots,$ qu'il y a de changements d'état possibles : on doit faire intervenir alors de nouvelles relations entre les quantités $z$, entre les quantités $x$ et $y$ et entre les quantités $z$ et $x$, pour exprimer le temps qui s'écoule entre un changement d'état et les autres et les âges auxquels ont lieu les divers changements d'état.

**8.** — La théorie formelle, objet d'études partielles de la part de Finlaison, Woulhouse, Moser, Fourier, Fischer, a été exposée d'une façon systématique par Knapp, Becker, Zeuner, Lexis [1].

Knapp [2] dans un de ses premiers travaux, et Zeuner [3] supposent, dans l'exposition analytique de la théorie formelle, la continuité des fonctions étudiées : quant à l'hypothèse de l'invariabilité de la loi de mortalité, Zeuner s'en débarrasse au contraire et sa méthode est plus simple que celle de son prédécesseur. Knapp [4], dans une deuxième œuvre, tient compte d'ailleurs de la discontinuité réellement présentée par les fonctions statistiques et est ainsi amené à se servir d'un algorithme particulier, *la sommation continue* (pour des fonctions discontinues de variables continues). Lexis [5] obtient une généralité et une simplicité plus grandes : il laisse complètement de côté les considérations analytiques et se sert, comme Knapp (*die Theorie*, etc.) de représentations planimétriques; de même que Zeuner s'était servi, dans l'œuvre citée plus haut, de représentations dans l'espace à trois dimensions.

[1] Cf. von Bortkiewicz. — *Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Statistik*, dans l'Enc. Math. BdI, ID4a, page 840. Cf. aussi :
Perozzo. — *Della rappresentazione grafica di ind. nella succ. del tempo, e in particolare dei diagrammi a tre coordinate*, dans les Annali di Statistica, Série II, vol. XII.
[2] *Sterblichkeit in Sachsen*, Leipzig, 1869.
[3] *Abhandlungen*, *loc. cit.*
[4] *Theorie des Bevolkerungswechsels*, Braunschweig, 1874.
[5] *Einleitung*, etc., *loc. cit.*

## V. — Application de la théorie formelle à la mortalité

### I. — *Méthode géométrique*

**9.** — Désignons par $x$ l'âge d'un individu, par $y$ l'époque de sa naissance et par $z$ l'époque à laquelle il a l'âge $x$. On a :

$$x + y = z.$$

Ayant choisi l'année comme unité de temps et O comme origine des temps, nous pouvons faire correspondre aux divers couples de nombres $(x, y)$ les points d'un plan, rapportés à un système d'axes OY (axe des temps) et OX (axe des âges).

Soit $x$ l'âge de $(x)$ au moment de sa mort, $y$ l'époque à la fin de laquelle il est né; le segment de droite qui joint les points $(o, y)$ et $(x, y)$ a une longueur proportionnelle à la durée de la vie de l'individu. Nous l'appellerons *ligne vitale* ou *ligne de vie* de l'individu considéré. Faisons correspondre maintenant un ligne de vie à chacun des individus nés vivants pendant une période donnée $(a_1, a_2)$ (où $a_2 = a_1 + 1$) : le rapport du nombre des points $(x, y)$ contenus dans le parallèlogramme $bcc'b'$ au nombre de points d'intersection des lignes de vie avec la droite d'équation $x = x_1$ représente la probabilité pour qu'un individu de la génération considérée meure à un âge compris dans l'intervalle $(x_1, x_2)$ (où $x_2 = x_1 + 1$).

C'est le nombre de ces points que la recherche statistique doit déterminer.

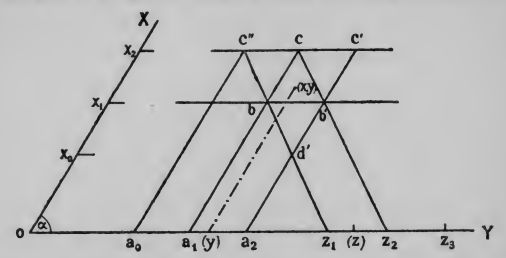
**10.** — Le nombre des points $(x, y)$ contenus dans $bcc'b'$ s'appellera le *premier ensemble de morts* et sera désigné par la notation $M_1\ (x_1, a_1)$; le nombre des points d'intersection avec la droite $x = x_1$ des lignes de vie correspondant aux individus nés vivants de la génération $(a_1, a_2)$, s'appellera le *premier ensemble de vivants* $V_1\ (x, a_1)$. On a évidemment :

$$M_1\ (x, a_1) = V_1\ (x_1, a_1) - V_1\ (x_2, a_1).$$

Pour des raisons auxquelles nous avons fait allusion précédemment, le premier ensemble de vivants ne peut pas être relevé



immédiatement, tandis qu'un relevé statistique peut parfaitement nous donner le nombre que nous appellerons *deuxième ensemble de vivants* et que nous désignerons par la notation $V_2\ (a_1, z_1)$ : ce sera le nombre des personnes nées pendant la période $(a_1, a_2)$ et en vie à l'époque $z_1$ (l'âge de ces personnes est compris entre $z_1 - a_1$ et




$z_1 - a_1 - 1$). Le nombre des points contenus dans le parallèlogramme $Cbd'b'$ est celui des individus qui, nés pendant l'intervalle $(a_1, a_2)$, meurent pendant l'intervalle $(z_1, z_2)$ : nous l'appellerons *second ensemble de morts* et nous le désignerons par $M_2\ (a_1, z_1)$ (l'âge des individus correspondant à ces points oscille évidemment entre $z_1 - a_1 + 1$ et $z_1 - a_1 - 1$. On a d'ailleurs :

$$M_2\ (a_1, z_1) = V_2\ (a_1, z_1) - V_2\ (a_1, z_2).$$

Enfin, le nombre de ceux qui meurent à un âge compris dans l'intervalle $(x_1, x_2)$ et à une époque de l'intervalle $(z_1, z_2)$ est représenté par le nombre des points intérieurs au parallèlogramme $b'bc''c$ : nous l'appellerons *troisième ensemble de morts* et nous le désignerons par $M_3\ (x_1, z_1)$.

Si on convient de remplacer les diverses surfaces par les nombres des points qui y sont contenus, la figure montre immédiatement que l'on a :

$$M_3\ (x_1, z_1) = V_2\ (a_0, z_1) - V_1\ (x_2, a_0) + V_1\ (x_1, a_2) - V_2\ (a_1, z_2).$$

Nous appellerons enfin *premier et second ensemble élémentaire de morts*, et nous désignerons par $E_1\ (x_1, a_1, z_1)$ et $E_2\ (x_1, a_1, z_1)$,

les nombres de points contenus respectivement dans les triangles $cc'b'$, $cbb'$ $\left(\text{triangles équilatéraux si } \alpha = \frac{\pi}{3}\right)$ : le premier exprime le nombre des individus nés pendant la période $(a_1, a_2)$ et morts pendant la période $(z_2, z_3)$ à un âge de l'intervalle $(x_1, x_2)$ ; le second exprime le nombre des individus nés pendant la période $(a_1, a_2)$ et morts pendant la période $(z_1, z_2)$ à un âge de l'intervalle $(x_1, x_2)$. Les ensembles élémentaires sont caractérisés par la propriété suivante : si on connaît à moins d'un an près, deux des trois éléments spécifiques $x$, $y$, $z$ d'un individu appartenant à l'un de ces ensembles, le troisième élément se trouve aussi déterminé à moins d'un an près ; ils diffèrent en cela des ensembles considérés tout d'abord ou ensemble principaux (*Hauptgesamtheiten* dans la terminologie des auteurs allemands) : pour ces derniers, à une variation possible d'un an pour deux des trois éléments spécifiques, correspond pour le troisième élément une variation possible de deux ans. Cela résulte évidemment et des définitions et de la figure.

**11.** — On a évidemment :

$$(4) \qquad q = \frac{M_1(x_1, a_1)}{V_1(x_1, a_1)}, \; p = \frac{V_1(x_2, a_1)}{V_1(x_1, a_1)}.$$

Nous nous proposons de voir quelles expressions on pourrait prendre pour $p$ et $q$, au lieu des expressions (4) dans le cas où la recherche statistique fournirait d'autres ensembles que les premiers ensembles de morts ou de vivants : c'est le cas où la table de mortalité à construire serait une table d'individus en vie au même moment et non pas la table d'une génération déterminée.

Supposons qu'on ait obtenu par la statistique les ensembles élémentaires de morts et les seconds ensembles de vivants. On a évidemment :

$$E_1(x_1, a_1, z_1) + E_2(x_1, a_1, z_1) = M_1(x_1, a_1)$$
$$V_2(a_1, z_2) = V_1(x_1, a_1) - E_2(x_1, a_1, z_1)$$



car le nombre des individus qui, appartenant à la génération $(a_1, a_2)$, sont en vie à l'époque $z_2$, augmenté du nombre des individus de la même génération qui sont morts pendant la période $(z_1, z_2)$ après avoir dépassé l'âge $x_1$, donne une somme égale au nombre des membres de la génération qui atteignent l'âge $x_1$. A l'aide des relations précédentes, on obtient :

$$q = \frac{E_1(x_1, a_1, z_1) + E_2(x_1, a_1, z_1)}{V_2(a_1, z_2) + E_2(x_1, a_1, z_1)} = \frac{M_1(x_1, a_1)}{V_1(x_1, a_1)}.$$

Mais il arrive le plus souvent que les ensembles élémentaires $E_1$ et $E_2$ ne sont pas l'objet d'un dénombrement spécial ; car le classement des décédés qui ont lieu au cours d'une année donnée, se fait simplement selon les âges des décédés pris d'année en année, sans considérer dans quelle période d'un an a eu lieu exactement la naissance. Cette hypothèse suppose, avec nos notations, qu'on connaît d'une part les troisièmes ensembles de morts (relevés sur les registres de l'état-civil) et d'autre part les seconds ensembles de vivants (résultant des recensements de la population). Il est nécessaire, dans ce cas, de recourir à des hypothèses supplémentaires, permettant d'obtenir une valeur approchée des ensembles élémentaires, lorsqu'on connaît les troisièmes ensembles de morts.

**12.** — Si l'on admet que les variations présentées par le nombre de naissances d'une année à la suivante sont très petites et par suite négligeables et si l'on admet bien entendu en outre que la loi d'élimination exerce une action constante, on pourra admettre aussi que deux ensembles élémentaires relatifs aux mêmes âges et à des périodes de temps adjacentes contiennent le même nombre de points.

Des égalités

$$E_1(x_1, a_0, z_1) = E_2(x_1, a_1, z_1) = E_1(x_1, a_1, z_1)$$

on tire

$$E_2(x_1, a_1, z_1) = \frac{1}{2} M_3(x_1, z_1)$$

et

$$(5) \qquad q = \frac{M_3(x_1, z_1)}{V_2(a_1, z_1) + \frac{1}{2} M_2(x_1, z_1)}$$

formule qui donne des valeurs de $p$ et de $q$ suffisamment approchées, pour tous les âges autres que les âges extrêmes.

Les relations établies précédemment entre les divers ensembles et les autres relations qu'on peut en déduire aisément permettent de déterminer, d'une façon analogue, les probabilités de décès dans chaque cas, lorsque la nature des données statistiques est déterminée. La solution du problème est rigoureuse, ou simplement approchée, suivant qu'il est possible ou non de ramener les ensembles fournis par l'observation à des ensembles du premier ordre, à l'aide des relations résultant de la représentation graphique et sans avoir recours à des hypothèses sur l'équivalence des nombres de points contenus dans des surfaces non superposées.

## VI. — Suite

### II. — *Méthode analytique. — L'algorithme de Knapp*

**13.** — Soit $L(x)$ le nombre des individus appartenant à une génération déterminée $(a_1, a_2)$ et en vie à l'âge $x$ : la différence :

$$L(x) - L(x + h)$$

représente le nombre des décès survenus à un âge de l'intervalle $(x, x + h)$, si le groupe considéré est un groupe *fermé*, c'est-à-dire un groupe qui n'est pas soumis à des phénomènes de migration.

Si $h$ est très petit, la différence $L(x) - L(x + h)$ est égale à un nombre entier et petit, ou à zéro, suivant qu'il y a eu ou non des décès pendant l'intervalle de temps considéré ; si $h$ est infiniment petit, $L(x) - L(x + h)$ est égal à zéro ou à l'unité.

La fonction $L(x)$ est donc une fonction discontinue décroissant depuis la valeur positive et entière $L(x)$ jusqu'à zéro, et ayant un nombre fini $L(x)$ de points de discontinuité en chacun desquels



elle passe de la valeur finie et entière $L(x_1)$ à la valeur $L(x_1) - 1$ $(x_1 \geqslant x)$.

Il résulte de la définition de cette fonction, qu'elle est intégrable : car toute fonction bornée qui admet un ensemble dénombrable de points de discontinuité en chacun desquels la fonction a une oscillation finie est intégrable.

$$\int_x^\infty L(x)dx$$

exprime évidemment le temps vécu par le groupe $L(x)$ depuis l'âge $x$ jusqu'à l'extinction totale du groupe.

Il résulte également de la définition même de la fonction qu'elle n'a pas de dérivée en $L(x)$ points de l'intervalle $(x, \infty)$ et que sa dérivée est égale à zéro en tous les autres points, en nombre infini.

Au lieu du rapport

$$\lim_{h=0} \frac{L(x + h) - L(x)}{h}$$

considérons la différence

$$(6) \qquad \lim_{h=0} \left[L(x) - L(x + h)\right] = dL(x)$$

et posons

$$dL(x) = \lambda(x).$$

La fonction $\lambda(x)$ est égale à zéro en un nombre infini de points et à l'unité en un nombre fini $L(x)$ de points. Il en résulte que l'on a, quels que soient $x_1$ et $x_2$ $(x_2 > x_1)$ :

$$(7) \qquad \int_{x_1}^{x_2} \lambda(x)dx = 0.$$

La démonstration se fait très simplement en divisant l'intervalle $(x_1, x_2)$ en intervalles partiels et égaux et en séparant ces intervalles en deux groupes : le premier groupe est formé des intervalles qui renferment des valeurs de $\lambda(x)$ égales à 1 et le

second groupe des intervalles dans lesquels $\lambda(x)$ est constamment nul. L'intégrale étendue aux seconds groupes est évidemment nulle ; pour les premiers groupes, l'intégrale est inférieure ou égale à la somme des intervalles eux-mêmes : mais ceux-ci, en nombre fini, peuvent être rendus aussi petits qu'on le veut ; donc l'intégrale est nulle.

Au lieu de l'intégrale (2), considérons la *sommation continue*

$$S_{x_1}^{x_2}\lambda(x)$$

de $\lambda(x)$ depuis $x_1$ jusqu'à $x_2$ : nous désignons ainsi la somme des valeurs prises par $\lambda(x)$ lorsque $x$ prend toutes les valeurs de l'intervalle $(x_1, x_2)$ en nombre infini. L'opération

$$S_x^{\infty}\lambda(x) = L(x) \tag{8}$$

est évidemment l'opération inverse de celle définie par (6). On a :

$$S_{x_1}^{x_2}\lambda(x) = L(x_1) - L(x_2) \tag{9}$$

et si on étend l'équation (9) à des valeurs de $x_1$ supérieures à $x_2$, on a :

$$-\int_{x_2}^{x_1} = \int_{x_1}^{x_2}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} + \int_{x_2}^{x_3} = \int_{x_1}^{x_3}.$$

**14.** — Plus généralement, si la génération considérée est celle des individus nés pendant l'intervalle $(a, y)$, nous poserons :

$$L(x) = L(x, y).$$

Si $x$ et $y$ varient d'une façon continue, des considérations tout à fait analogues à celles qui ont été faites pour $\lambda(x)$ s'appliquent à la différentielle

$$\lim_{h=0}\left[L(x, y+h) - L(x, y)\right] = \mu(x, y)$$



et à l'expression

$$-\lim_{h'=0}\left[\mu(x+h', y) - \mu(x, y)\right] = \lambda(x, y)$$

qui donne le nombre des individus nés pendant l'intervalle $(y, y+h)$ et morts à un âge de l'intervalle $(x, x+h')$.

Les ensembles introduits précédemment s'obtiendront par la sommation continue de la fonction $\lambda(x, y)$, effectuée par rapport aux deux variables et étendue aux valeurs de $x$ et de $y$ comprises dans les intervalles de définition des ensembles.

Le nombre des individus nés pendant l'intervalle $(a_1, a_2)$ et survivants à l'âge $x$, autrement dit le premier ensemble de vivants $V_1(x_1, a_1)$, s'exprime en effet par :

$$S_{y=a_1}^{y=a_2}\mu(x, y)$$

qui est égal à

$$\underset{x=x_1}{\overset{x=\infty}{S}}\ \underset{y=a_1}{\overset{y=a_2}{S}}\lambda(x, y),$$

à cause de la relation (8) qui devient ici :

$$\mu(x, y) = \underset{x=x}{\overset{x=\infty}{S}}\lambda(x, y),$$

On a aussi d'une façon évidente :

$$\underset{x=x_1}{\overset{x=x_2}{S}}\ \underset{y=a_1}{\overset{y=a_2}{S}}\lambda(x, y) = M_1(x_1, a_1)$$

et, si l'on pose $x = z - y$

$$\underset{y=a_1}{\overset{y=a_2}{S}}\ \underset{z=z_1}{\overset{z=\infty}{S}}\lambda(y, z-y) = V_2(a_1, z_1)$$

$$\underset{y=a_1}{\overset{y=a_2}{S}}\ \underset{z=z_1}{\overset{z=z_2}{S}}\lambda(y, z-y) = M_2(a_1, z_1).$$

On a donc d'une façon analogue, si l'on remplace $y$ par $z - x$ :

$$\mathop{\mathrm{S}}_{x=x_1}^{x=x_2} \mathop{\mathrm{S}}_{z=z_1}^{z=z_2} \lambda(x, z-x) = \mathrm{M}_3(x_1, z_1)$$

Des expressions analytiques analogues s'appliquent aux deux ensembles élémentaires pour lesquels les limites sont définies respectivement par les deux groupes d'inégalités :

$$a_1 < y < a_2,\ x_1 < x < x_2,\ z_2 < z < z_3$$

et

$$a_1 < y < a_2,\ x_1 < x < x_2,\ z_1 < z < z_2.$$

d'après la définition même de ces ensembles.

On a en effet :

$$\mathop{\mathrm{S}}_{y=a_1}^{y=a_2} \mathop{\mathrm{S}}_{x=z_2-y}^{x=x_2} \lambda(x, y) = \mathrm{E}_1(x_1, a, z_1)$$

$$\mathop{\mathrm{S}}_{y=a_1}^{y=a_2} \mathop{\mathrm{S}}_{x=x_1}^{x=z_2-y} \lambda(x, y) = \mathrm{E}_2(x_1, a_1, z_1)$$

d'où la relation déjà établie :

$$\mathrm{E}_1(x_1, a_1, z_1) + \mathrm{E}_2(x_1, a_1, z_1) = \mathrm{M}_1(x_1, a_1).$$

**15.** — On part habituellement de l'hypothèse que la fonction $\mathrm{L}(x, y)$ est continue et dérivable par rapport aux deux variables $x$ et $y$, c'est-à-dire que l'on admet l'existence des fonctions $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ définies par les égalités :

$$\mathrm{L}(x, y + dy) - \mathrm{L}(x, y) = f(x, y)\,dy \tag{10}$$

$$-\left[f(x + dx, y) - f(x, y)\right] = \varphi(x, y)\,dy\,dx. \tag{11}$$

La première fonction exprime le nombre des individus qui, nés pendant l'intervalle infiniment petit $dy$, sont en vie à l'âge $x$ et la



deuxième le nombre de ceux qui, nés pendant l'intervalle $dy$, sont encore en vie à l'âge $x$, mais ne le sont plus à l'âge $x + dx$ (1).

L'équation

$$f(x, y) = z \tag{12}$$

rapportée à un système de coordonnées cartésiennes, définit une surface dans l'espace à trois dimensions : Zeuner considère la détermination de cette surface comme le but lointain et inaccessible, au point de vue rigoureusement mathématique, de toute recherche statistique et de toute interprétation analytique de cette recherche (2).

Mais à tout système de valeurs $(x, y)$ correspond aussi un point du plan XOY considéré jusqu'ici : moyennant l'hypothèse de l'existence d'une fréquence ou densité moyenne des naissances et des décès pour chaque ensemble, l'expression analytique des divers ensembles s'obtient donc en substituant aux sommations continues considérées tout d'abord des intégrales ordinaires ou des intégrales prises le long des segments ou le long des contours des aires qui définissent les ensembles dans le plan XOY (3).

(1) Cette hypothèse se justifie par le parallélisme évident qu'il y a entre le calcul infinitésimal et l'algorithme introduit précédemment : dans la pratique, ce dernier n'est nullement indispensable. Voir Bohlmann *Ueber Versicherungsmathematik*, dans Klein et Riecke : *Ueber angewandte Math und Physik*, p. 136.

(2) Zeuner. — *Loc. cit.*, p. 11.

(3) Posons $y = \varphi(t)$ $x = \psi(t)$ ($\varphi$ et $\psi$ sont supposés dérivables par rapport à $t$) et soit C la courbe décrite par le point $(x, y)$ lorsque le paramètre $t$ varie de $t_0$ à $t_1$. L'intégrale prise le long de la courbe C est

$$\int_{t_0}^{t_1} f(\varphi, \psi)\,\varphi'(t)\,dt$$

ou, si l'on pose $y = t$

$$\int_{y_0}^{y_1} f(y, \psi(y))\,dy.$$

Par exemple, le premier ensemble de vivants s'obtient par une intégration le

long du segment $bb'$ de notre figure, c'est-à-dire qu'il s'exprime par

$$\int_{y=a_1}^{y=a_2} f(y, \psi(y))\,dy.$$

Le premier ensemble de morts s'obtient au contraire par une intégration le long du contour $bb'c'cb = C$ dans le sens défini par l'ordre des lettres. D'après les relations (5) et (6) du texte cet ensemble s'exprime par :

$$-\int_{a_1}^{a_2} dy \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\,dx = -\int_{a_1}^{a_2} dy \left[ f(x_2, y) - f(x_1, y) \right] =$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} f(x_1, y)\,dy + \int_{a_2}^{a_1} f(x_2, y)\,dy = \int_C f(x, y)\,dy.$$

## VII. — Détermination de la probabilité de décès dans les groupes ouverts.

**16.** — Le problème de la détermination de la probabilité de décès dans un groupe fermé — c'est-à-dire qui n'est pas soumis à l'action de phénomènes de migration — peut être considéré comme un cas particulier du problème plus complexe de la détermination de la probabilité de décès dans des groupes ouverts : ces derniers sont ceux qui sont soumis à d'autres causes de diminution que le décès des membres du groupe et qui sont sujets à des augmentations provenant de l'entrée dans le groupe d'éléments qui n'en faisaient pas partie au commencement de la période pour laquelle on veut déterminer la probabilité du décès.

La notion de migration est prise ici dans un sens qui n'est pas identique au sens attribué d'ordinaire à ce mot : on considère comme une migration le passage d'une catégorie démographique donnée à une autre, par exemple le passage d'un individu de la catégorie des célibataires à celle des personnes mariées, si l'on veut déterminer la probabilité de décès pour les deux classes séparément.



Le problème, dans le cas actuel, est le suivant.

On a observé, dans un groupe donné :

L individus d'âge $x$ ;

D individus morts à un âge de l'intervalle $(x, x+1)$ ;

I individus entrés dans le groupe à un âge de l'intervalle $(x, x+1)$ et dans le courant de l'année d'observation ;

E individus sortis du groupe par émigration à un âge et à une époque appartenant aux mêmes intervalles.

Il s'agit de déterminer la probabilité

$$q(x, x+1) = q$$

qu'a un membre du groupe d'âge $x$ de ne pas atteindre l'âge $x+1$.

**17.** — L'expression de $q$ qu'on adopte habituellement est la suivante :

$$q = \frac{D}{L + \frac{I - E}{2}}.$$

La démonstration de cette formule est basée sur les hypothèses suivantes :

I. — Les émigrations et les immigrations sont réparties uniformément sur la durée entière de l'année d'observation.

II. — La fonction $L(x)$, qui exprime le nombre des individus en vie à l'âge $x$ et qu'on suppose continue, est telle que, si l'on pose

$$h = \frac{1}{n}, \qquad r = 1, 2, \ldots n-1,$$

on a :

$$q(x + rh, x + (r+1)h) = \frac{1}{n} q(x, x+1).$$

En d'autres termes, on suppose que la probabilité de décès reste constante durant toute l'année d'observation.

III. La probabilité $q(x+k, x+h)$ de décès à un âge de l'intervalle $(x+k, x+h)$

$$(0 < k < h < 1)$$

est pour chacun des individus considérés, indépendante, du fait d'appartenir ou non au groupe pendant la période $h-k$.

$\mathrm{I}dh$ représente alors le nombre des individus entrés dans le groupe à un âge de l'intervalle $x+h$, $x+h+dh$.

A ce nombre correspond un nombre

$$\mathrm{I}\frac{l(x)}{l(x+h)}dh \tag{13}$$

d'individus en vie à l'âge $x$ et qu'on aurait observés s'ils avaient fait partie du groupe à l'origine et

$$\mathrm{I}dh\left\{\frac{l(x)}{l(x+h)}-1\right\}$$

est le nombre des décès soustraits à l'observation, du fait que les individus (13) n'appartenaient pas au groupe lorsqu'ils avaient un âge de l'intervalle $(x, x+h)$.

D'une façon analogue :

$$\mathrm{E}dh,\ \mathrm{E}\frac{l(x+1)}{l(x+h)}dh, \qquad \mathrm{E}dh\left\{1-\frac{l(x+1)}{l(x+h)}\right\}$$

expriment respectivement le nombre des individus sortis du groupe à un âge de l'intervalle $x+h$, $x+h+dh$, le nombre des survivants à l'âge $x+1$ parmi $\mathrm{E}dh$ individus en vie à l'âge $x+h$ et le nombre de ces individus morts à un âge de l'intervalle $x+h$, $x+1$.

Par suite, si l'on attribue à $h$ toutes les valeurs de l'intervalle $(0,1)$ en nombre infini, on obtient comme expression du nombre total des individus (observés ou non observés) en vie à l'âge $x$ :

$$\mathrm{L}+\mathrm{I}l(x)\int_0^1\frac{dh}{l(x+h)}$$



et comme expression du nombre total des décès survenus à un âge de l'intervalle $(x, x+1)$ :

$$\mathrm{D}+\mathrm{I}\left\{l(x)\int_0^1\frac{dh}{l(x+h)}-1\right\}+\mathrm{E}\left\{1-l(x+1)\int_0^1\frac{dh}{l(x+h)}\right\}$$

d'où l'on déduit que la probabilité demandée est :

$$q=\frac{\mathrm{D}+\mathrm{I}\{l(x)k-1\}-\mathrm{E}\{l(x+1)k-1\}}{\mathrm{L}+\mathrm{I}kl(x)} \tag{14}$$

où

$$k=\int_0^1\frac{dh}{l(x+h)}$$

Mais on a, à cause de II,

$$q(x+h, x+1)=(1-h)q$$

d'où l'on déduit aisément :

$$kl(x+1)=l(x+1)\int_0^1\frac{dh}{l(x+h)}=\int_0^1[1-(1-h)q]\,dh=1-\tfrac{1}{2}q$$

et l'équation (14) devient :

$$\begin{aligned} q\mathrm{L} &= \mathrm{D}+\mathrm{I}kl(x)(1-q)+\mathrm{E}-\mathrm{I}-\mathrm{E}kl(x+1)\\ &= \mathrm{D}-(\mathrm{I}-\mathrm{E})[1-kl(x+1)]\\ \mathrm{D} &= q\mathrm{L}+(\mathrm{I}-\mathrm{E})\left(1-1+\tfrac{1}{2}q\right)\end{aligned}$$

$$q=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{L}+\frac{1}{2}(\mathrm{I}-\mathrm{E})} \tag{15}$$

**18.** — Il serait aisé de démontrer que l'on parvient à la même formule en supposant que la probabilité de décès pour des périodes inférieures à un an, au lieu d'être proportionnelle à la durée de ces périodes, est définie par l'équation :

$$l(x+h)=l(x)-h[l(x)-l(x+1)]$$

III. La probabilité $q(x+k, x+h)$ de décès à un âge de l'intervalle $(x+k, x+h)$

$$(0 < k < h < 1)$$

est pour chacun des individus considérés, indépendante, du fait d'appartenir ou non au groupe pendant la période $h-k$.

$\mathrm{I}dh$ représente alors le nombre des individus entrés dans le groupe à un âge de l'intervalle $x+h$, $x+h+dh$.

A ce nombre correspond un nombre

$$\mathrm{I}\frac{l(x)}{l(x+h)}dh \tag{13}$$

d'individus en vie à l'âge $x$ et qu'on aurait observés s'ils avaient fait partie du groupe à l'origine et

$$\mathrm{I}dh\left\{\frac{l(x)}{l(x+h)}-1\right\}$$

est le nombre des décès soustraits à l'observation, du fait que les individus (13) n'appartenaient pas au groupe lorsqu'ils avaient un âge de l'intervalle $(x, x+h)$.

D'une façon analogue :

$$\mathrm{E}dh,\ \mathrm{E}\frac{l(x+1)}{l(x+h)}dh, \qquad \mathrm{E}dh\left\{1-\frac{l(x+1)}{l(x+h)}\right\}$$

expriment respectivement le nombre des individus sortis du groupe à un âge de l'intervalle $x+h$, $x+h+dh$, le nombre des survivants à l'âge $x+1$ parmi $\mathrm{E}dh$ individus en vie à l'âge $x+h$ et le nombre de ces individus morts à un âge de l'intervalle $x+h$, $x+1$.

Par suite, si l'on attribue à $h$ toutes les valeurs de l'intervalle $(0,1)$ en nombre infini, on obtient comme expression du nombre total des individus (observés ou non observés) en vie à l'âge $x$ :

$$\mathrm{L}+\mathrm{I}l(x)\int_0^1\frac{dh}{l(x+h)}$$



et comme expression du nombre total des décès survenus à un âge de l'intervalle $(x, x+1)$ :

$$\mathrm{D}+\mathrm{I}\left\{l(x)\int_0^1\frac{dh}{l(x+h)}-1\right\}+\mathrm{E}\left\{1-l(x+1)\int_0^1\frac{dh}{l(x+h)}\right\}$$

d'où l'on déduit que la probabilité demandée est :

$$q=\frac{\mathrm{D}+\mathrm{I}\{l(x)k-1\}-\mathrm{E}\{l(x+1)k-1\}}{\mathrm{L}+\mathrm{I}kl(x)} \tag{14}$$

où

$$k=\int_0^1\frac{dh}{l(x+h)}$$

Mais on a, à cause de II,

$$q(x+h, x+1)=(1-h)q$$

d'où l'on déduit aisément :

$$kl(x+1)=l(x+1)\int_0^1\frac{dh}{l(x+h)}=\int_0^1[1-(1-h)q]\,dh=1-\frac{1}{2}q$$

et l'équation (14) devient :

$$\begin{aligned} q\mathrm{L} &= \mathrm{D}+\mathrm{I}kl(x)(1-q)+\mathrm{E}-\mathrm{I}-\mathrm{E}kl(x+1)\\ &= \mathrm{D}-(\mathrm{I}-\mathrm{E})[1-kl(x+1)]\\ \mathrm{D} &= q\mathrm{L}+(\mathrm{I}-\mathrm{E})\left(1-1+\frac{1}{2}q\right)\end{aligned}$$

$$q=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{L}+\frac{1}{2}(\mathrm{I}-\mathrm{E})} \tag{15}$$

**18.** — Il serait aisé de démontrer que l'on parvient à la même formule en supposant que la probabilité de décès pour des périodes inférieures à un an, au lieu d'être proportionnelle à la durée de ces périodes, est définie par l'équation :

$$l(x+h)=l(x)-h\big[l(x)-l(x+1)\big]$$

autrement dit en admettant que les décès se répartissent uniformément sur toute l'année. On peut aussi adopter, au sujet de la fréquence des émigrations et des immigrations aux divers âges de l'intervalle $(x, x+1)$, l'hypothèse de Zeuner, qui consiste à supposer que cette fréquence est proportionnelle au nombre des survivants ayant l'âge considéré.

Si l'on pose

$$L' = L + I - E - D$$

d'où

$$I - E = L' - L + D$$

$$L + \frac{1}{2}(I - E) = \frac{1}{2}\{L + L' + D\}$$

on tire de l'équation (15) :

$$q = \frac{2D}{L + L' + D} \tag{16}$$

de sorte que la probabilité de décès se trouve déterminée en fonction seulement du nombre des décès observés et du nombre des membres du groupe au début et à la fin de l'année d'observation.

On aurait pu suivre une autre voie pour établir le résultat précédent et pour montrer l'équivalence des diverses hypothèses énoncées plus haut relativement à la répartition des migrations dans le cours d'une année : l'équation (16), interprétée au point de vue statistique, nous montre qu'il suffit, pour déterminer les probabilités de décès même dans des groupes ouverts, de connaître les premiers ensembles de vivants et les ensembles élémentaires de morts (sans s'occuper de savoir, pour ces derniers, si les individus observés à l'âge $x$ appartiennent ou non au groupe) [1].

[1] Voir aussi : Lexis. — *Abh. z. Th. der Bevoelkerungs-und-Moralstat.* Iéna, 1903.



## VIII. — Introduction de nouvelles fonctions biométriques.

**19.** — Les fonctions $q_x = q(x, x+1)$, $p_x = 1 - q_x$, $l_x$, $l_x - l_{x+1} = d_x$ considérées jusqu'ici suffisent, même si on les prend isolément, pour définir la loi de mortalité d'un groupe donné aux divers âges exprimés par des nombres entiers d'années : mais à côté de ces fonctions, on en introduit quelquefois d'autres, liées à ces dernières par des relations analytiques déterminées, en vue d'objets particuliers ou de conditions spéciales imposées par les développements analytiques, ou simplement comme expressions parallèles à celles-là et pouvant leur être substituées ; on donne à ces diverses fonctions le nom générique de *fonctions biométriques* et on entend quelquefois par table de survie ou de mortalité une table des valeurs de toutes ces fonctions ou de certaines d'entre elles.

**20.** — Nous avons vu (§ **6**, n° 13) que la fonction $l_x$ est intégrable et que

$$\int_x^\infty l_x dx = \int_x^\omega l_x dx$$

($\omega$ désignant l'âge extrême de la table de survie) exprime le temps total vécu par l'ensemble des $l_x$ individus ayant l'âge $x$. Le quotient

$$\frac{1}{l_x}\int_x^\omega l_x dx = E_x \tag{17}$$

s'appelle *vie moyenne de l'individu d'âge x* et exprime la durée qu'aurait la vie de chacun des $l_x$ membres du groupe si, $\int_x^\omega l_x dx$ conservant le sens précisé plus haut, tous les individus vivaient le même temps.

On a manifestement $l_x > l_{x+1} > \ldots \geqslant 0$, de sorte que :

$$\sum_{n=1} l_{x+n} < \int_0^\omega l_x dx < \sum_{n=0} l_{x+n}$$

ou, si l'on pose

$$\frac{1}{l_x} \sum_{n=1} l_{x+n} = e_x, \qquad e_x < E_x < e_x + 1.$$

On peut, en l'absence de renseignements plus précis au sujet de $l_x$, se servir du postulat de Cauchy et prendre :

$$E_x = e_x + \frac{1}{2}. \tag{18}$$

C'est cette quantité $e_x + \frac{1}{2}$ que les actuaires anglais appellent *complete expectation of life* et qu'ils désignent par $\mathring{e}_x$ par opposition avec $e_x =$ *curtate expectation of life*).

**20.** — De l'égalité

$$e_x = \frac{\sum_{n=1} l_{x+n}}{l_x}$$

on tire, d'une façon évidente :

$$e_x = \frac{\sum_{n=1} l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x} + \frac{l_{x+1}}{l_x} \frac{\sum_{n=2} l_{x+n}}{l_{x+1}}$$

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{e_x}{1 + e_{x+1}} = \frac{\mathring{e}_x - \frac{1}{2}}{\mathring{e}_{x+1} + \frac{1}{2}}. \tag{19}$$

**21.** — La notion de *vie probable* est différente : c'est encore un élément tel qu'on peut difficilement le prendre comme expression



correcte de la loi de mortalité. Si l'on pose :

$$l_x + W_x = \frac{1}{2} l_x \tag{20}$$

$W_x$ s'appelle la *vie probable correspondant à l'âge x* : il serait très aisé de démontrer que la vie probable et la vie moyenne coïncident si on a :

$$l_x - l_{x+1} = l_{x+1} - l_{x+2} = \ldots$$

**22.** — On peut étendre la notion de probabilité de décès à des périodes plus petites qu'un an et à des périodes infiniment petites, en supposant qu'il existe une fonction $l_x$ de $x$, continue par rapport à $x$, représentant le nombre des survivants à l'âge $x$ même pour les valeurs non entières de $x$.

Représentons par $\mu_x dx$ la probabilité pour que $x$ meure pendant l'intervalle de temps infiniment petit $dx$. De l'égalité

$$\mu_x dx = \frac{l_x - l_{x+dx}}{l_x}$$

on tire aisément :

$$l_{x+dx} = l_x(1 - \mu_x dx)$$

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x} \frac{dlx}{dx}. \tag{21}$$

L'inégalité $l_x > l_{x+h} (h > 0)$ montre que $l'_x = \frac{dlx}{dx}$ est négatif, d'où l'on conclut $\mu_x > 0$ quel que soit $x$.

La quantité $\mu_x$ s'appelle *coefficient instantané de mortalité* ou *force de mortalité* : ce dernier nom, introduit par Woolhouse (*force of mortality*), est celui qui est adopté en général [1].

[1] Von Bortkievicz (*Die Mittlere Lebensdauer*, Iena, 1893, p. 4) insiste sur ce fait que $\mu_x$ n'est pas une probabilité (c'est seulement l'infiniment petit $\mu_x dx$ qui est en effet une probabilité) et il trouve qu'il serait plus logique de l'appeler *Dichtichkeit der Sterbenswahrscheinlichkeit* (densité de la probabilité de décès). On emploie également l'expression *Sterbe-Intensität* : une autre expression analogue, mais moins brève, est l'expression *Intensität der Sterblichkeit* (intensité de la mortalité) que Westergaard (*Grundzüge der Theorie der Statistik*, Iena, 1890, p. 175) voudrait voir adopter.

**23.** — L'équation (21) étant mise sous la forme

$$\mu_x dx = -\frac{dl_x}{l_x}$$

on en déduit en intégrant entre des limites indéfinies et entre les limites $x$, $x_1$ $(x_1 < x)$ :

$$\int \mu_x dx = -\log l_x + c$$

$$\int_{x_1}^{x} \mu_x dx = -\log \frac{l_x}{l_{x_1}} = \log \frac{l_{x_1}}{l_x}$$

et en passant des logarithmes aux nombres

(22) $$l_x = ce^{-\int \mu_x dx}$$

$$\frac{l_x}{l_{x_1}} = e^{-\int_{x_1}^{x} \mu_x dx}$$

d'où, si on suppose $x = x_1 + 1$ :

(23) $$p(x, x+1)p_x = e^{-\int_x^{x+1} \mu_x dx}$$

(24) $$q(x, x+1) = q_x = 1 - e^{-\int_x^{x+1} \mu_x dx}$$

**24.** — De l'équation

$$-\frac{dl_x}{dx}dx = l_x \mu_x dx$$

on déduit de même :

$$l_{x_1} - l_{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} l_x \mu_x dx$$

et si l'on pose

$$\int_{x_1}^{x_2} l_x \mu_x dx = \mu\left[x_1 + \theta(x_2 - x_1)\right] \int_{x_1}^{x_2} l_x dx$$



(où $0 < \theta < 1$)

$$\mu\left[x_1 + \theta(x_2 - x_1)\right] = m$$

on a :

(25) $$m = \frac{\int_{x_1}^{x_2} l_x \mu_x dx}{\int_{x_1}^{x_2} l_x dx} = \frac{l_{x_1} - l_{x_2}}{\int_{x_1}^{x_2} l_x dx}$$

La quantité $m$ ou coefficient moyen de mortalité dans un intervalle donné reçoit simplement le nom de *coefficient de mortalité* dans cet intervalle : ce n'est pas autre chose que la valeur moyenne entre les diverses valeurs prises dans l'intervalle par le coefficient instantané de mortalité [1].

Si, dans l'équation (25), on pose : $x_1 = x$, $x_2 \geqslant \omega$, on a :

(26) $$m = \frac{l_x}{\int_x^{\infty} l_x dx} = \frac{1}{E_x}$$

égalité qui fournit une relation très simple entre la vie moyenne à un certain âge et le coefficient moyen de mortalité relatif à l'intervalle qui sépare cet âge de l'âge extrême de survie.

On en déduit aussi, en désignant par $c_x$ le coefficient de mortalité dans l'intervalle $(x, x+1)$ :

(27) $$c_x = \frac{d_x}{\int_x^{x+1} l_x dx} = \frac{d_x}{l_x E_x - l_{x+1} E_{x+1}}.$$

**25.** — En l'absence d'une expression analytique de la fonction $l_x$, on ne peut pas déterminer $\mu_x$ d'une façon effective. D'où la nécessité de faire des hypothèses qui permettent d'obtenir les valeurs de $l_x$ pour les valeurs fractionnaires de la variable $x$ en fonction des valeurs de $l_x$ pour les valeurs entières de $x$. Sup-

[1] Von Bortkievicz. — *Mittl. Lebensd*, p. 5 et 6.

posons, par exemple, que $l_x$ s'exprime à l'aide d'une fonction entière de degré $m$ et que l'on pose :

$$(28) \qquad l_{x+z} = f(x+z) = \varphi(z) = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \ldots + \nu z^m$$

On trouve très aisément que l'on a $\varphi'(0) = f'(x) = \beta$, d'où :

$$(29) \qquad \mu_x dx = -\frac{\beta}{l_x}.$$

On déterminera la constante $\beta$ par des procédés bien connus : l'égalité (29) fournira alors une valeur de $\mu$ d'autant meilleure que le nombre des points connus par lesquels passe la courbe (28) est plus grand.

Si on suppose $m = 4$ et si on fait passer la parabole (28) par les points d'abscisse

$$f(x-2), f(x-1), f(x), f(x+1), f(x+2)$$

on obtient :

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} & -\frac{f'(x)}{f(x)}\mu_x dx = \\ & = \frac{8[f(x-1) - f(x+1)] - [f(x-2) - f(x+2)]}{12 f(x)} \end{aligned} \right.$$

L'interpolation de $l_x$ à l'aide de 3 ou de 2 points fournit de même comme expression de $\mu_x dx$ :

$$(31) \qquad \frac{f(x-1) - f(x+1)}{2f(x)}$$

ou

$$(32) \qquad \frac{f(x) - f(x+1)}{f(x)}.$$

L'hypothèse à laquelle correspond l'expression (32) est celle d'une variation linéaire de $l_x$ : elle est connue sous le nom d'hypothèse de De Moivre et elle ne peut être acceptée que pour des intervalles de temps relativement restreints. Mais dans ce cas on a aussi



$$\int_x^{x+1} l_x dx = l_{x+\frac{1}{2}}$$

et l'expression (26) du coefficient de mortalité $m$ devient alors :

$$(33) \qquad \frac{l_x - l_{x+1}}{l_{x+\frac{1}{2}}} = \frac{dx}{l_{x+\frac{1}{2}}} = \frac{d_x}{l_x - \frac{1}{2}d_x}.$$

La quantité définie par l'équation (33) est le coefficient central de mortalité (*central death rate*) des actuaires anglais.

**26.** — Si on admet au contraire que c'est $\mu_x$ qui varie linéairement, on trouve

$$\int_x^{x+1} \mu_x dx = \mu_{x+\frac{1}{2}}$$

$$p_x = e^{-\mu_{x+\frac{1}{2}}}$$

$$(34) \quad q_x = 1 - e^{-\mu_{x+\frac{1}{2}}} = \mu_{x+\frac{1}{2}} - \frac{\mu^2_{x+\frac{1}{2}}}{2} + \frac{\mu^3_{x+\frac{1}{2}}}{6} - \ldots$$

et, si on remplace l'expression (34) par

$$q_x = \mu_{x+\frac{1}{2}} - \frac{\mu^2_{x+\frac{1}{2}}}{2} + \frac{\mu^3_{x+\frac{1}{2}}}{4} - \ldots$$

qui en diffère de moins de

$$\frac{\mu^3_{x+\frac{1}{2}}}{12}$$

(substitution d'autant plus légitime que $\mu_x$ est plus petit), on trouve :

$$(35) \qquad q_x = \frac{\mu_{x+\frac{1}{2}}}{1 + \mu_{x+\frac{1}{2}}}$$

d'où

$$p_x = \frac{2 - \mu_{x+\frac{1}{2}}}{2 + \mu_{x+\frac{1}{2}}} \tag{36}$$

$$\mu_{x+\frac{1}{2}} = \frac{q_x}{1 - \frac{q_x}{2}} = \frac{2(l_x - l_{x+1})}{l_x + l_{x+1}}. \tag{37}$$

**27.** — On appelle finalement *vie la plus probable* d'un individu d'âge $x$ la différence $\xi - x_1$, où l'on suppose que $x = \xi$ vérifie les relations

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 l_x}{d x^2} &= 0 \\ -\frac{d^3 l_x}{d x^3} &< 0. \end{aligned} \right. \tag{38}$$

Les relations (38) définissent en effet la valeur maxima de la probabilité

$$-\frac{d l_x}{l_{x_1}} = -\frac{1}{l_{x_1}} \frac{d l_x}{dx} dx$$

pour que $x_1$ meure à un âge de l'intervalle $(x, x + dx)$ : à $\xi$ correspond, d'après un théorème de géométrie différentielle bien connu, un point d'inflexion de la courbe $l_x = y$.

Quant à la *valeur probable de la vie d'un individu* $(x)$ *d'âge* $x_1$, au sens défini par le calcul des probabilités (I, 8), c'est la quantité $E_{x_1}$ déjà considérée : cela résulte de la définition même de $E_{x_1}$ si on déduit cette quantité, non plus du temps total vécu par l'ensemble des $l_{x_1}$ individus d'âge $x_1$, mais de la somme des probabilités pour que chacun des $(x_1)$ survive $x - x_1$ années, chaque probabilité étant multipliée par $x - x_1$. L'intégration par parties donne en effet

$$\int_x^\omega -\frac{d l_x}{dx}(x - x_1)\, dx = \int_x^\omega l_x dx$$



d'où :

$$E_{x_1} = -\frac{1}{l_{x_1}} \int_{x_1}^\omega d l_x\, (x - x_1).$$

## IX. — Mortalité de groupes spéciaux

**28.** — Dans les recherches qui précèdent nous avons admis l'existence, pour un groupe d'individus donné, d'une probabilité de décès fonction de l'âge et de l'âge seulement (la durée des périodes auxquelles est rapportée cette probabilité étant supposée fixe).

Demandons-nous maintenant quels sont, en dehors de l'âge, les facteurs dont dépend la mortalité et quelle est l'influence de chacun de ces facteurs.

Le problème est bien loin d'être résolu, à supposer qu'il soit susceptible d'une solution rigoureuse : s'il est démontré par la statistique que certaines conditions individuelles ont une influence sur la mortalité (sexe, situation économique, profession, genre de vie, abus, usage ou abstinence des boissons alcooliques, des excitants, etc..., état civil, hérédité et atavisme, etc...), les données scientifiques qu'on possède sont plutôt de nature à faire regretter de n'avoir pas des connaissances plus approfondies à ce sujet que de nature à permettre une application pratique des connaissances actuelles.

On peut peut-être faire une exception en ce qui concerne le sexe : les relevés séparés de la mortalité masculine et de la mortalité féminine constituent en effet une des recherches les plus faciles et les moins souvent oubliées.

Rappelons ici que la mortalité des femmes, sensiblement inférieure à la mortalité des hommes dans les premières années de la vie, la dépasse d'une petite quantité de la 10e à la 15e année ainsi qu'à l'époque où la fécondité de la femme est la plus grande (de 27 à 35 ans), puis lui redevient inférieure en s'en écartant (en

moins) surtout aux âges les plus avancés (à partir de 50 ans). La marche de la mortalité, ainsi définie, a été mise en lumière (sauf pour l'enfance et l'adolescence) par les recherches faites sur des groupes assurés en Angleterre et en Allemagne ; elle résulte aussi, au moins en partie, des données que nous reportons plus bas et qui concernent la population allemande (de 1871 à 1881) et la population italienne (de 1876 à 1887) : pour cette dernière la mortalité plus forte des femmes à l'époque de la fécondité est particulièrement sensible.

| Population allemande | | | Population italienne | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Age | Nombre des survivants | | Age | Nombre des survivants | |
| | Hommes | Femmes | | Hommes | Femmes |
| 0 | 100000 | 100000 | 0 | 100000 | 100000 |
| 1 | 74627 | 78260 | 1 | 78690 | 80670 |
| 5 | 65997 | 69295 | 5 | 62863 | 64273 |
| 10 | 62089 | 65237 | 10 | 59410 | 60518 |
| 15 | 60892 | 63878 | 15 | 57914 | 58759 |
| 27 | 55927 | 59170 | 27 | 52797 | 53332 |
| 30 | 54454 | 57566 | 30 | 51473 | 51766 |
| 35 | 51815 | 54685 | 35 | 49321 | 49178 |
| 40 | 48775 | 51576 | 40 | 46902 | 46439 |
| 50 | 41228 | 45245 | 50 | 40831 | 40908 |
| 60 | 31124 | 36293 | 60 | 32319 | 33229 |
| 70 | 17750 | 21901 | 70 | 19797 | 20031 |

Cependant des recherches sur la population hollandaise faites récemment par Landré et Paraira semblent démontrer que la diminution dans la mortalité des enfants (phénomène qui n'est pas douteux d'après d'autres recherches) est actuellement plus sensible pour les garçons que pour les filles, d'où une atténuation dans la différence observée d'abord au détriment des enfants mâles



Nous sommes ainsi conduits à nous demander si la mortalité varie avec le temps, et comment elle varie. Certains font observer que la mortalité doit être considérée, dans l'ensemble, comme constante et qu'on remarque seulement une mortalité plus faible chez les riches et plus forte chez les pauvres, les différences se compensant mutuellement. D'autres au contraire estiment que la statistique a mis en évidence une diminution dans la mortalité au cours du dix-neuvième siècle : on invoque les résultats de la statistique officielle (surtout de la statistique de la Suède, qui comprend les données du XIXe siècle et de la deuxième moitié du XVIIIe), et les résultats relatifs à divers établissements d'assurance ou à des professions particulières [1].

Mais s'il n'est pas douteux, ainsi que nous l'avons déjà remarqué, que la mortalité des enfants diminue, et si la mortalité des jeunes gens paraît diminuer également, il y a, pour les personnes âgées de plus de 50 ans, plutôt une aggravation qu'une amélioration dans la mortalité [2].

(1) WESTERGAARD. — *Die Grundzüge*, etc., p. 165. — *Die Lehre von der Mortalität und der Morbilität*, Iena, 1902. Cette deuxième œuvre de Westergaard est la plus complète que l'on ait en matière de statistique vitale.

(2) Du moins suivant les recherches présentées au Congrès international des Actuaires de New-York (1904), par MM. Warner (sur la population anglaise) et Gore (sur la population de l'Amérique du Nord). Mais « la discussion a mis avant tout en évidence la nécessité de données statistiques plus nombreuses et recueillies par des procédés plus uniformes pour pouvoir énoncer des conclusions d'un caractère général... » et la question de la diminution de la mortalité « n'apparaît en aucune façon comme résolue par les travaux du Congrès ; elle semble, au contraire, plus compliquée qu'auparavant ». Les deux citations précédentes sont tirées, la première du rapport du professeur Gobbi au Ministre de l'Agriculture d'Italie sur les travaux du Congrès, la deuxième d'un rapport sur les mêmes travaux publié par le Dr Manes, dans le *Zeitschrift für die Gesamte Versicherungswissenchaft*. Pour la population de l'Allemagne le Bureau impérial de statistique remarque également que les données exprimant le rapport entre le nombre des vivants à un certain âge et le nombre des naissances dans l'année d'où proviennent ces vivants ne suffisent pas pour permettre de résoudre

**29.** — Mais, même en supposant identiques toutes les autres caractéristiques (âge, profession, race, époque de la naissance, etc.), un groupe d'individus assurés se différencie d'un groupe d'individus non assurés par le fait que les seuls individus qui puissent entrer dans le groupe ou qui soient conduits à y entrer sont ceux qu'on a jugés ou qui se sont jugés d'eux-mêmes dans des conditions de santé particulièrement bonnes. En d'autres termes le groupe présente, au moment de sa formation et pendant un temps plus ou moins long à partir de ce moment, une mortalité au-dessous de la normale, par suite de la sélection exercée au début par l'assureur ou par les assurés eux-mêmes.

Une division fondamentale est celle des opérations d'assurances en deux classes comprenant, la première les opérations en cas de mort, et la deuxième les opérations en cas de vie.

Pour la première, la somme assurée est versée par l'assureur dans la période unitaire pendant laquelle a lieu le décès et cette somme peut n'être payée au moment du décès que si l'assuré meurt avant une certaine époque. Il est donc de l'intérêt de l'assureur que les individus assurés meurent le plus tard possible : c'est pourquoi il a recours à un examen médical qui lui permette d'exclure de l'assurance tous les candidats chez qui l'état de santé et le genre de vie laissent prévoir une faible résistance aux maladies et une mort à une époque peu éloignée.

A l'égard de l'assurance en cas de mort, les individus ou, pour employer le terme technique, les *risques* peuvent être classés en risques normaux, risques anormaux et risques exceptionnels. La deuxième catégorie comprend les risques que l'assureur accepte, mais avec des restrictions spéciales ou avec des augmentations de prime ou encore les risques acceptés après une sélection seulement

le problème des variations de la mortalité : et cela à cause de l'influence des émigrations et des immigrations, et aussi à cause de l'impossibilité de remonter à une époque antérieure à 1841 : la mortalité des classes les plus âgées échappe donc aux recherches.



partielle [1]. Dans la troisième catégorie on range les risques absolument inacceptables ou acceptables seulement à des conditions tout à fait exceptionnelles [2] ; dans la première, on met les individus mâles admis à l'assurance en cas de mort dans des conditions normales et à la suite d'un examen médical complet.

Dans les opérations en cas de vie les engagements de l'assureur sont subordonnés à l'existence de l'individu assuré à un moment déterminé ou à une série de moments déterminés : il ne convient donc de contracter une pareille assurance que si on juge soi-même qu'on est dans des conditions telles qu'une mort prématurée paraisse improbable.

Aux deux catégories d'opérations ainsi définies il faudrait ajouter une troisième catégorie, celle des opérations mixtes, résultant de la combinaison des opérations en cas de mort et des opérations en cas de vie. Les premières étant prépondérantes d'habitude, on peut assimiler cette troisième catégorie, au point de vue des effets de la loi de mortalité, aux opérations en cas de mort.

Les risques contre lesquels on s'assure sont d'habitude les risques appelés plus haut risques normaux et les risques des opérations en cas de vie : les tables de mortalité que nous aurons l'occasion de citer par la suite se rapportent, presque exclusivement, à ces risques.

A chacun de ces risques correspond d'ailleurs une loi de mortalité spéciale : la mortalité des individus assurés en cas de vie (en abrégé, des rentiers viagers) est en effet plus faible que la mortalité relative aux risques normaux.

[1] Les assurances dites *assurances populaires* par exemple assurent en cas de mort, pour de petites sommes, sans examen médical ; on se contente de recevoir du candidat la déclaration qu'il jouit d'une bonne santé.

[2] La mortalité particulière à cette troisième catégorie (subdivisée en trois classes) a été traitée d'une façon particulièrement complète par Blaschke, *Denkschrift zur Lösung des Problems der Versicherung minderwertiger Leben*, Wien, 1895.

De plus, on admet l'équivalence des divers risques composant une même classe. Cette hypothèse n'a que la valeur d'un artifice destiné à rendre possible la détermination de primes basées sur des probabilités : en fait il y a lieu au contraire de présumer que la durée plus ou moins grande de la somme assurée, la forme spéciale d'assurance ont une influence, au sein de chaque classe, sur l'action plus ou moins énergique de la sélection à l'entrée [1]. L'observation confirme l'existence de l'action de ces éléments secondaires, sans permettre toutefois, pour l'instant, une mesure précise de cette action.

**30.** — Un facteur particulièrement important, en ce qui concerne la mortalité des groupes assurés est la durée qui s'est écoulée entre le moment où le groupe s'est formé et le moment où l'on étudie la mortalité. A mesure que le temps s'écoule, les effets de la sélection sont en effet neutralisés et la mortalité du groupe se rapproche de la mortalité de groupes analogues non soumis à la sélection.

On appelle même quelquefois sélection le fait, qui résulte de là, que la mortalité des assurés d'un certain âge croît sensiblement dans les 3 à 5 premières années où le contrat est en vigueur [2].

Ce fait, déjà signalé en 1851 par Higham, pour les assurés anglais, et confirmé par les observations ultérieures, devait conduire à adopter des tables de mortalité à double entrée dans lesquelles la probabilité de décès est calculée séparément pour chaque âge et pour chacune des périodes unitaires pendant lesquelles l'opération est en vigueur.

[1] Il faut tenir compte aussi du fait que chaque forme d'assurance est choisie de préférence par certaines classes de la population, ayant une mortalité particulière. Il y a donc, à côté de la sélection médicale et de l'anti-sélection une troisième forme de sélection, agissant parallèlement aux deux autres, et à laquelle on a donné le nom bien choisi de *sélection sociale*.

[2] Bohlmann. — *Loc. cit.*, 866.



Nous aurons l'occasion, en traitant la résiliation des contrats, de faire allusion à ce qu'on appelle l'*anti-sélection*, qui provient de l'abandon de l'opération par les risques les plus favorables à l'assureur.

## X. — Détermination de la probabilité de décès dans les groupes choisis.

**31.** — Soient, pour une certaine forme d'assurance,

$$D_0, D_1, D_2, \ldots$$

les nombres des individus d'âge $(x, x+1)$ morts pendant la première, la deuxième, la troisième.... année d'assurance et

$$L_0, L_1, L_2, \ldots$$

les nombres des individus d'âge $x$ faisant partie du groupe assuré depuis 0, 1, 2... ans, au début de chaque année et posons :

$$q_k = \frac{D_k}{L_k}.$$

En disant que $q_k$ est la probabilité *a posteriori* pour qu'un individu assuré depuis $k$ années ne survive pas au delà de l'âge $x+1$, nous admettons que les divers individus d'âge $x$ entrés dans le groupe depuis $k$ années sont assimilables entre eux, dans le sens déjà expliqué plusieurs fois.

Les considérations du numéro précédent montrent que l'on a, au moins jusqu'à une certaine valeur $k$ de l'indice :

$$(a) \qquad q'_0 < q'_1 < q'_2 < \ldots\ldots$$

(où $q'_k$ désigne la probabilité *a priori* correspondant à $q_k$).

Si on laisse de côté les relations $(a)$ et qu'on considère les diverses valeurs de $q_k$ comme les expressions d'une même probabilité constante $q'$ (considérée d'après cela comme propre à tous les individus d'âge $x$ faisant partie du groupe assuré) le problème de la détermi-

nation de $q$ est évidemment identique au problème de la détermination de la probabilité *a posteriori* pour qu'on tire une boule blanche ou une boule noire de plusieurs urnes distinctes, contenant des boules blanches et noires dans une proportion inconnue, mais la même pour toutes les urnes.

Dans ce cas, il revient au même de tirer les boules de plusieurs urnes séparées ou d'une urne unique présentant la même proportion relative de boules blanches et de boules noires. La probabilité $q'$ a pour expression *a posteriori* :

$$q = \frac{D_0 + D_1 + D_2 + \dots}{L_0 + L_1 + L_2 + \dots}. \tag{39}$$

**32.** — Mais, même dans l'hypothèse d'une probabilité unique propre à tous les membres du groupe d'âge $x$, chacune des probabilités $q_0$, $q_1$, $q_2$, ... comporte une précision différente, si les $L_k$ sont différents pour les différentes valeurs de $k$ et il y a lieu de reprendre les raisonnements en affectant ces quantités de leurs divers poids dans l'équation qui détermine l'inconnue $q'$.

Comme inconnue on peut prendre :

*a*) soit la probabilité de décès $q'$ ;

*b*) soit le nombre probable des décès.

Dans le premier cas l'erreur moyenne qui affecte chacune des probabilités *a posteriori* $q_k$ est :

$$m_k = \sqrt{\frac{q_k(1 - q_k)}{L_k}},$$

elle est proportionnelle à $\frac{1}{\sqrt{L_k}}$ et par suite le poids est proportionnel à $L_k$ (Cf. I, § 5, n. 21) ; dans le second cas l'erreur moyenne est au contraire

$$L_k m_k = \sqrt{L_k q_k (1 - q_k)}$$

elle est proportionnelle à $\sqrt{L_k}$ et le poids est proportionnel à $\frac{1}{L_k}$.



Soit $q$ la valeur de $q'$ qu'on veut déterminer, les erreurs apparentes sont définies par les équations :

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_0 = -\frac{D_0}{L_0} + q \\ \lambda_1 = -\frac{D_1}{L_1} + q \\ \dots\dots \end{array}\right. \tag{40}$$

dans l'hypothèse *a*) et par les équations :

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda'_0 = -D_0 + L_0 q \\ \lambda'_1 = -D_1 + L_1 q \end{array}\right. \tag{41}$$

dans l'hypothèse *b*). D'après la méthode des moindres carrés, il faut rendre minimum

$$L_0 \lambda_0^2 + L_1 \lambda_1^2 + L_2 \lambda_2^2 + \dots \tag{42}$$

dans le premier cas et

$$\frac{\lambda'^2_0}{L_0} + \frac{\lambda'^2_1}{L_1} + \frac{\lambda'^2_2}{L_2} + \dots \tag{43}$$

dans le second cas.

En égalant à zéro la dérivée première de (42) ou de (43) par rapport à $q$ et en tenant compte des systèmes (40) et (41), on obtient :

$$L_0\left(q - \frac{D_0}{L_0}\right) + L_1\left(q - \frac{D_1}{L_1}\right) + \dots = 0 \tag{44}$$

$$-D_0 + L_0 q - D_1 + L_1 q + \dots = 0 \tag{45}$$

d'où, dans les deux cas

$$q = \frac{D_0 + D_1 + D_2 + \dots}{L_0 + L_1 + L_2 + \dots} \tag{46}$$

expression qui est identique à celle qu'on avait obtenue sans faire intervenir les poids.

nation de $q$ est évidemment identique au problème de la détermination de la probabilité *a posteriori* pour qu'on tire une boule blanche ou une boule noire de plusieurs urnes distinctes, contenant des boules blanches et noires dans une proportion inconnue, mais la même pour toutes les urnes.

Dans ce cas, il revient au même de tirer les boules de plusieurs urnes séparées ou d'une urne unique présentant la même proportion relative de boules blanches et de boules noires. La probabilité $q'$ a pour expression *a posteriori* :

$$q = \frac{D_0 + D_1 + D_2 + \ldots}{L_0 + L_1 + L_2 + \ldots}. \tag{39}$$

**32.** — Mais, même dans l'hypothèse d'une probabilité unique propre à tous les membres du groupe d'âge $x$, chacune des probabilités $q_0$, $q_1$, $q_2$, ... comporte une précision différente, si les $L_k$ sont différents pour les différentes valeurs de $k$ et il y a lieu de reprendre les raisonnements en affectant ces quantités de leurs divers poids dans l'équation qui détermine l'inconnue $q'$.

Comme inconnue on peut prendre :

*a*) soit la probabilité de décès $q'$ ;

*b*) soit le nombre probable des décès.

Dans le premier cas l'erreur moyenne qui affecte chacune des probabilités *a posteriori* $q_k$ est :

$$m_k = \sqrt{\frac{q_k(1 - q_k)}{L_k}},$$

elle est proportionnelle à $\frac{1}{\sqrt{L_k}}$ et par suite le poids est proportionnel à $L_k$ (Cf. I, § 5, n. 21) ; dans le second cas l'erreur moyenne est au contraire

$$L_k m_k = \sqrt{L_k q_k (1 - q_k)}$$

elle est proportionnelle à $\sqrt{L_k}$ et le poids est proportionnel à $\frac{1}{L_k}$.



Soit $q$ la valeur de $q'$ qu'on veut déterminer, les erreurs apparentes sont définies par les équations :

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_0 = -\frac{D_0}{L_0} + q \\ \lambda_1 = -\frac{D_1}{L_1} + q \\ \ldots\ldots \end{array}\right. \tag{40}$$

dans l'hypothèse *a*) et par les équations :

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda'_0 = -D_0 + L_0 q \\ \lambda'_1 = -D_1 + L_1 q \end{array}\right. \tag{41}$$

dans l'hypothèse *b*). D'après la méthode des moindres carrés, il faut rendre minimum

$$L_0 \lambda_0^2 + L_1 \lambda_1^2 + L_2 \lambda_2^2 + \ldots \tag{42}$$

dans le premier cas et

$$\frac{\lambda'^2_0}{L_0} + \frac{\lambda'^2_1}{L_1} + \frac{\lambda'^2_2}{L_2} + \ldots \tag{43}$$

dans le second cas.

En égalant à zéro la dérivée première de (42) ou de (43) par rapport à $q$ et en tenant compte des systèmes (40) et (41), on obtient :

$$L_0\left(q - \frac{D_0}{L_0}\right) + L_1\left(q - \frac{D_1}{L_1}\right) + \ldots = 0 \tag{44}$$

$$-D_0 + L_0 q - D_1 + L_1 q + \ldots = 0 \tag{45}$$

d'où, dans les deux cas

$$q = \frac{D_0 + D_1 + D_2 + \ldots}{L_0 + L_1 + L_2 + \ldots} \tag{46}$$

expression qui est identique à celle qu'on avait obtenue sans faire intervenir les poids.

**33.** — Si on suppose ces derniers égaux, l'expression (42) donne :

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots = \text{minimum}$$

d'où, dans le cas *a*) :

$$q = \frac{1}{k}\left[\frac{D_0}{L_0} + \frac{D_0}{L_0} + \ldots + \frac{D_{k-1}}{L_{k-1}}\right] \tag{47}$$

et, si on prend les erreurs $\lambda'$ au lieu des $\lambda$ :

$$\lambda_0 L_0 + \lambda_1 L_1 + \ldots = 0 \tag{48}$$

$$q = \frac{L_0 D_0 + L_1 D_1 + \ldots}{L_0^2 + L_1^2 + \ldots}. \tag{49}$$

Les expressions (47) et (49) se rapportent donc à des cas spéciaux et on ne peut s'en servir correctement que si l'on se trouve (au besoin d'une façon seulement approchée) dans les conditions conduisant à leur démonstration [1].

**34.** — Les valeurs $q_k$ relevées directement ont été considérées jusqu'ici comme des manifestations d'une probabilité mathématique constante, soumise seulement à des variations accidentelles : mais le problème doit encore être posé autrement si l'on considère, d'une façon plus correcte, les $q_k$ comme les expressions empiriques, affectées par suite aussi d'erreurs accidentelles, de diverses probabilités de décès inconnues, relatives chacune à un système de valeurs $(k, x)$.

[1] Meikle, (*On the preparation of a table of mortality from observations of various magnitude*, dans les « Transactions of the Act. Society of Edinburgh », vol. IV, n. 19) considère l'expression (49) comme la seule expression correcte de $q$. Mais sa démonstration est basée sur une application inexacte du principe des moindres carrés. Cf. Landré, *Das Kombinieren der Sterbens-wahrscheinlichkeiten aus verschiedenen Beobachtungsjahren*, dans le « Zeitschrift für die Ges. Versicherungsw. » Bd. III, 3 Heft, et surtout les considérations décisives de M. Czuber, que nous adoptons. — (Czuber, *Zum Problem der Sterblichkeitsmessung*, Zeitschrift, etc., Bd. IV, 2 Heft).



Dans ce cas la quantité $q'$ qu'on veut déterminer pour l'ensemble du groupe doit être considérée comme une moyenne entre les probabilités partielles propres aux diverses classes de risques.

Supposons que le groupe total, pour lequel on cherche la probabilité $q'$, soit formé de :

$L'_0$ individus d'âge $x$ entrés dans le groupe depuis 0 ans
$L'_1$ individus d'âge $x$ entrés dans le groupe depuis 1 an
. . . . . .

et posons

$$L'_0 + L'_1 + \ldots = L'.$$

La probabilité moyenne cherchée sera :

$$q' = \frac{L'_0}{L'} q'_0 + \frac{L'_1}{L'} q'_1 + \ldots \tag{50}$$

ou, en substituant aux probabilités *a priori* $q'_k$ leurs expressions empiriques

$$q_k = \frac{D_k}{L_k}$$

$$q = \frac{L'_0}{L'}\frac{D_0}{L_0} + \frac{L'_1}{L'}\frac{D_1}{L_1} + \ldots \tag{51}$$

Dans le cas particulier où l'on a

$$\frac{L'_0}{L_0} = \frac{L'_1}{L_1} = \ldots \frac{\Sigma L'}{\Sigma L} \tag{52}$$

cette expression devient :

$$q = \frac{D_0 + D_1 + \ldots}{L_0 + L_1 + \ldots}.$$

Il en résulte que l'adoption de la valeur (46) pour $q'$ dans le cas des groupes choisis n'est légitime que si le rapport $\frac{L'}{L}$ reste constant pour les divers âges considérés [1].

[1] Czuber, *Zum Problem*, etc., p. 165.

## XI. — Ajustement des tables de survie

**35.** — Les points $(x, y)$, définis par les valeurs

$$y = q(x, x+1) = q_x$$

pour les différentes valeurs entières de $x$, n'ont pas normalement une disposition telle qu'on puisse les joindre par un trait de courbe régulier. Il arrive au contraire qu'à des âges voisins correspondent des valeurs de $y$ sensiblement différentes et que les différences $q_{x+1} - q_x$ ont, pour les différentes valeurs de $x$, des amplitudes et des signes tels qu'il est impossible d'assigner une loi précise à la suite de ces quantités.

L'*ajustement* d'une table de mortalité a pour but de remplacer les points $y = q_x$ observés directement par un système de points qui, tout en s'écartant le moins possible des premiers, définissent dans leur ensemble une loi de variation simple et continue.

Tout procédé d'ajustement est donc basé, explicitement ou tacitement, sur l'hypothèse de l'existence d'une loi de mortalité susceptible d'une expression analytique relativement simple. Supposons cette loi connue et exprimée par l'équation

$$(a) \qquad q_x = F(x, a, b, c, \ldots.)$$

où F représente une fonction de forme déterminée reliant la variable indépendante $x$ aux probabilités de décès ($a$, $b$, $c$, ... étant des constantes).

Il est alors possible de déterminer les valeurs des paramètres qui figurent dans $(a)$, si on connaît autant de valeurs $q_x$ qu'il y a de paramètres, et par suite de trouver la loi de mortalité d'une collectivité donnée.

**36.** — Mais on pourrait se demander comment se justifie la croyance en la simplicité de la loi de mortalité.



Il serait difficile de le préciser. On pourrait remarquer que, les erreurs une fois éliminées, les probabilités observées doivent présenter des variations parfaitement régulières parce que, comme tous les phénomènes naturels, la mortalité doit être régie par des lois continues [1] : mais cette remarque aurait à son tour besoin d'être justifiée.

Il est plus correct de dire qu'en joignant par un trait continu et le plus régulier possible les points fournis par l'expérience nous ne faisons que choisir la forme la plus commode parmi toutes les formes possibles et également justifiables de notre courbe.

Autrement dit, on admet que toute loi est simple, tant qu'on n'a pas démontré qu'elle n'est pas simple ; la question se réduit alors pour nous à celle-ci : l'allure irrégulière de la courbe $y = q_x$ peut-elle être justifiée sans avoir recours à l'hypothèse d'une loi de mortalité compliquée ?

Or ceci est évidemment possible.

Dans la détermination *a posteriori* de la valeur de chacune des probabilités, on commet en premier lieu une erreur d'autant plus grande que le nombre des observations est plus petit.

Nous savons en effet que, la loi de Gauss étant admise, il y a une probabilité

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\lambda}{\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt$$

pour que l'erreur dans la détermination de la probabilité de décès soit comprise entre $-\lambda m$ et $+\lambda m$, en désignant par $m$ l'erreur moyenne :

$$m = \sqrt{\frac{q(1-q)}{s}}$$

($s$ == nombre des observations).

[1] Poterin du Motel, *Théorie des assurances sur la vie*, Paris, 1899, p. 112.

Comme $m$ varie en raison inverse de la racine carrée du nombre $s$ des observations, des erreurs assez fortes sont non seulement possibles, mais même assez probables, pour les âges qui sont l'objet des recherches les moins fréquentes.

En second lieu, une détermination des probabilités de décès faite le plus soigneusement possible n'exclut pas la possibilité d'autres causes d'erreur provenant de la nécessité de recourir à des hypothèses (au sujet des émigrations et des immigrations par exemple, ou encore au sujet du passage d'ensembles du second ou du troisième ordre à des ensembles du premier ordre) et ces hypothèses peuvent n'être que partiellement d'accord avec la réalité ; d'autres erreurs proviennent d'inexactitudes dans le relevé des âges, etc. [1].

Dans la pratique, on cherche à réduire le plus possible l'influence des deux espèces d'erreurs en opérant sur des groupes démographiques aussi importants que possible : c'est pourquoi on combine les observations de plusieurs compagnies d'assurances distinctes et on étend les recherches à des périodes relativement longues : mais on ne peut dépasser certaines limites dans cette voie sans diminuer l'homogénéité des données statistiques.

**37.** — L'hypothèse d'une loi de mortalité simple étant ainsi justifiée, l'ajustement d'un ensemble de données empiriques peut être obtenu de deux façons :

*a*) en ne faisant aucune hypothèse particulière sur la forme de la loi de mortalité ;

*b*) en partant au contraire d'une loi hypothétique de mortalité.

Le premier procédé d'ajustement peut être *mécanique* ou *graphique* : il est dit mécanique si on se sert de moyennes, de différences ou d'autres combinaisons des résultats d'observation propres à compenser les écarts entre les divers résultats.

Le second procédé d'ajustement est dit *analytique*.

[1] Czuber, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, p. 393.



## XII. — Ajustement analytique

### I. — *Lois de survie*

**38.** — Si, dans la détermination de $q_x$ au moyen de la fonction

$$q_x = \mathrm{F}(x, a, b, c, \ldots.)$$

le nombre des constantes $a, b, c, \ldots$ était égal à celui des âges contenus dans la table de mortalité, c'est-à-dire au nombre des valeurs $q_x$ observées, la fonction F fournirait une expression exacte de chacune de ces valeurs : elle reproduirait fidèlement la fonction $y = q_x$ déterminée par l'observation directe.

Cette fonction ne présenterait donc aucune utilité pour l'ajustement. Il y a intérêt au contraire à déterminer F de façon que, tout en dépendant d'un nombre de paramètres aussi petit que possible, cette fonction définisse une courbe s'approchant le plus possible de la courbe fournie par l'observation.

La loi dite *loi de Gompertz-Makeham* remplit cette condition, soit par le petit nombre de paramètres qu'elle contient, soit par l'exactitude avec laquelle elle arrive à représenter la courbe de survie des risques normaux, pour les âges auxquels l'assurance a lieu (à partir de 20 ans) : cette loi possède en outre des propriétés qui lui donnent une valeur particulière au point de vue des applications.

D'autres lois plus simples, énoncées antérieurement à la précédente, n'ont actuellement, comme lois de survie, qu'une valeur purement historique ; d'autres enfin, plus générales, ont un intérêt surtout théorique, pour l'instant du moins.

**39.** — Parmi les lois les plus anciennes, nous avons déjà eu l'occasion de citer la loi de *de Moivre*, qui suppose que le nombre $l_x$ des survivants d'âge $x$ est une fonction linéaire de l'âge ; pour De Moivre [qui établissait sa loi d'après la table de Halley (1693)], l'âge

extrême de survie est 85 ans : on a donc $l_{86} = 0$ : si $a$ est le nombre annuel des décès, constant pour tous les âges, on a :

$$l_x = a(86 - x). \tag{53}$$

Au lieu de supposer constant le nombre annuel des décès, supposons au contraire constante la probabilité annuelle de décès, $q = 1 - \alpha$ : la loi de survie qui résulte de là est évidemment définie par une fonction exponentielle. Nous avons vu en effet que l'on a :

$$l_x = l_0 \prod_{x=0}^{x=x-1} p_x$$

d'où, en supposant $p_x = 1 - q_x = \alpha$ constant aux divers âges :

$$l_x = l_0 \alpha^x. \tag{54}$$

Dans ce cas, le coefficient instantané de mortalité est aussi constant et égal à $\log \frac{1}{\alpha}$.

**40.** — Supposons au contraire que cette dernière quantité soit une fonction linéaire de $x$ et soit :

$$\mu_x = a + bx.$$

L'égalité (21)

$$\mu_x dx = -\frac{d l_x}{l_x}$$

donne :

$$l_x = e^{\alpha - ax - \frac{b}{2}x^2} = e^{\alpha - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2} \tag{55}$$

en posant :

$$\alpha_1 = a, \quad \alpha_2 = \frac{b}{2}.$$

La fonction (55) possède une propriété remarquable.



Soient $r$ têtes $(x)$, $(y)$, $(z)$, .... La probabilité pour que les $r$ têtes survivent toutes au bout de $r$ années est évidemment ;

$$\frac{l_{x+n}}{l_x}\frac{l_{y+n}}{l_y}\frac{l_{z+n}}{l_z} = \ldots =$$

$$= \frac{e^{\alpha - \alpha_1(x+n) - \alpha_2(x+n)^2}}{e^{\alpha - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2}} \cdot \frac{e^{\alpha - \alpha_1(y+n) - \alpha_2(y+n)^2}}{e^{\alpha - \alpha_1 y - \alpha_2 y^2}}$$

$$\ldots = e^{-\alpha_1 rn - \alpha_2 rn^2 - 2\alpha_2 n(x+y+z+\ldots)}$$

Si l'on pose :

$$\frac{x + y + z + \cdots}{r} = \xi,$$

$$e^{-\alpha_1 rn - \alpha_2 rn^2 - 2\alpha_2 rn\xi} = e^{-\alpha_1 rn + \alpha_2 rn^2 - 2\alpha_2 n(x+y+z+\ldots)}$$

est la probabilité pour que $r$ individus de même âge $\xi$ survivent après $n$ années : $\xi$ étant indépendant de $n$, toutes les probabilités de survie et de décès valables pour le premier groupe subsistent pour ce second groupe.

**41.** — Les lois de Gompertz et de Makeham possèdent une propriété analogue.

Ces deux auteurs partent tous les deux de cette remarque que la mortalité dépend d'un double ensemble de causes : les unes extérieures et accidentelles sont indépendantes de l'état physique de l'individu, en particulier de son âge ; les autres au contraire varient avec l'âge et ont, à partir d'une certaine valeur de ce dernier, une action de plus en plus efficace.

Mais Gompertz se borne à supposer que le coefficient instantané de mortalité est une fonction de l'âge croissant en progression géométrique ; Makeham procède d'une façon plus exacte en ajoutant à l'expression de Gompertz une quantité constante destinée à exprimer la part du hasard : ce n'est plus le coefficient instantané de mortalité qui croît en progression géométrique, mais la différence entre les coefficients instantanés.

Posons donc :

$$\mu_x = A + B\,c^x.$$

De l'équation

$$-\frac{dl_x}{l_x} = (A + Bc^x)dx$$

nous tirons

$$\log l_x = -Ax - \frac{B}{\log c}\,c^x + \log k$$

ou, en posant

$$-A = \log s, \quad -\frac{B}{\log c} = \log g,$$

$$\log l_x = x \log s + c^x \log g + \log k$$

(56) $$l_x = ks^x g^{c^x}$$

$k$ est complètement arbitraire : il n'entre pas dans l'expression de la probabilité $p_x$ de survie,

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = sg^{(c-1)c^x}$$

qui ne contient que trois constantes.

De la formule de Makeham on déduit celle de Gompertz en prenant :

$$A = \log s = 0, \; s = 1.$$

Les quantités

(57) $$l_x = kg^{c^x}$$

et

$$p_x = g^{(c-1)c^x}$$

expriment alors respectivement le nombre des vivants d'âge $x$ et la probabilité qu'a un individu d'âge $x$ de vivre encore un an.



**42.** — Nous avons vu (23) que l'on a :

$$p(x, x+n) = e^{-\int_x^{x+n} \mu_x dx}$$

En remplaçant $\mu_x$ par $A + Bc^x$, on obtient :

$$e^{-An - \frac{B}{\log c} c^x (c^n - 1)}$$

qui exprime la probabilité pour qu'un individu $(x)$ d'âge $x$ survive à l'âge $x + n$, en supposant exacte la loi de Makeham.

Considérons $r$ individus $(x)$, $(y)$, $(z)$..... :

$$e^{-An - \frac{B}{\log c} c^x (c^n - 1)} \; e^{-An - \frac{B}{\log c} c^y (c^n - 1)} \cdots$$

$$= e^{-Arn - \frac{B}{\log c} \{c^x + c^y + c^z + \ldots\} (c^n - 1)}$$

sera alors la probabilité pour que les $r$ individus survivent tous après $n$ années et

$$e^{-A\rho n \frac{B}{\log c} \rho c^\xi (c^n - 1)}$$

sera de même la probabilité pour que $\rho$ individus ayant tous l'âge $\xi$ survivent après $n$ années.

Pour que ces deux probabilités coïncident, il suffit évidemment que l'on ait :

(58) $$\begin{cases} -A\rho n - \dfrac{B}{\log c}(c^n - 1)\rho c^\xi = \\ = -Arn - \dfrac{B}{\log c}(c^n - 1)(c^x + c^y + c^z + \ldots) \end{cases}$$

Pour la loi de Gompertz $A = 0$. L'équation (58) est alors satisfaite si l'on a :

(59) $$\rho c^\xi = c^x + c^y + c^z + \ldots..$$

ou, en prenant $\rho = 1$, si l'on a :

(60) $$c^\xi = c^x + c^y + c^z + \ldots..$$

Il revient donc au même (puisque $\xi$ est indépendant de $n$) de considérer un groupe de $r$ têtes $(x)$, $(y)$, $(z)$ ..... ou bien une tête unique $(\xi)$, dont l'âge $\xi$ soit défini par l'équation (60) ; les probabilités de survie du groupe subsistent pour la tête unique. La propriété ainsi établie s'appellera propriété *gompertzienne*.

Soit maintenant $A \neq 0$ : la loi de survie est alors la loi de Makeham. L'équation (58) est satisfaite si $\rho = r$ et si

$$rc^{\xi} = c^{x} + c^{y} + c^{z} + \ldots\ldots \tag{61}$$

Il revient donc au même ($\xi$ étant indépendant de $n$) de considérer un groupe de $r$ têtes d'âges $(x, y, z, \ldots\ldots)$ ou un groupe de $r$ têtes également, mais d'âges tous égaux à $\xi$. La propriété définie par l'équation (61) sera dite propriété *makehamienne*.

**43.** — Nous avons vu que la propriété makehamienne appartenait à la loi de Makeham (par suite à la loi de Gompertz qui en est un cas particulier) et aussi à la loi de survie déduite précédemment de l'hypothèse d'une variation linéaire du coefficient instantané de mortalité.

On démontre qu'elle appartient exclusivement à ces lois.

La démonstration est basée sur le théorème très général qui suit et qui est dû à M. Quiquet.

« Soit $\rho < r$. La condition nécessaire et suffisante que doit remplir une fonction de survie pour que la probabilité de survie, après le temps $t$, d'un groupe de $r$ têtes $(x_1, x_2, \ldots x_r)$ puisse s'exprimer par une fonction G de $t$ et de $\rho$ âges $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\rho$, et de ces variables seulement, est que la dérivée première du coefficient instantané de mortalité $\mu_x$, déduit de cette fonction, vérifie une équation différentielle linéaire et homogène d'ordre $\rho$. »

On veut avoir :

$$\frac{l_{x_1+t}}{l_{x_1}} \cdot \frac{l_{x_2+t}}{l_{x_2}} \cdots \frac{l_{x_r+t}}{l_{x_r}} = G(\xi_1, \xi_2, \xi_3 \ldots \xi_\rho, t)$$



En prenant la dérivée logarithmique des deux membres par rapport à $t$ et en posant $-\frac{G'}{G} = F$, on a :

$$\frac{l'_{x_1+t}}{l_{x_1+t}} + \frac{l'_{x_2+t}}{l_{x_2+t}} + \ldots \frac{l'_{x_r+t}}{l_{x_r}} = -F(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_\rho, t)$$

ou, puisque l'on a

$$\frac{l'_{x+t}}{l_{x+t}} = -\mu_x,$$

$$\mu_{x_1+t} + \mu_{x_2+t} + \ldots + \mu_{x_r+t} = F(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\rho, t) \tag{62}$$

En prenant les dérivées successives des deux membres de (62) par rapport à $t$, et en désignant par $F_0, F_1, F_2, \ldots F_\rho$ les valeurs prises par le second membre et par ses $\rho$ premières dérivées pour $t = 0$, nous obtenons le système :

$$\begin{cases} \mu_{x_1} + \mu_{x_2} + \ldots + \mu_{x_r} = F_0 \\ \mu'_{x_1} + \mu'_{x_2} + \ldots + \mu'_{x_r} = F_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \mu_{x_1}^{(\rho)} + \mu_{x_2}^{(\rho)} + \ldots + \mu_{x_r}^{(\rho)} = F_\rho \end{cases} \tag{63}$$

Il y a une relation entre les seconds membres des équations (63) : en effet ils sont au nombre de $\rho + 1$ et ils ne sont fonctions que des $\rho$ variables $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\rho$. Il en résulte qu'il y a aussi une relation entre les premiers membres et que les déterminants fonctionnels des $\rho + 1$ fonctions par rapport à $\rho + 1$ des $r$ variables sont identiquement nuls.

On a par exemple :

$$\begin{vmatrix} \mu'_{x_1} & \mu'_{x_2} \ldots & \mu'_{x_{\rho+1}} \\ \mu''_{x_1} & \mu''_{x_2} \ldots & \mu''_{x_{\rho+1}} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \mu_{x_1}^{(\rho+1)} & \mu_{x_2}^{(\rho+1)} \ldots & \mu_{x_{\rho+1}}^{(\rho+1)} \end{vmatrix} = 0$$

On aura aussi :

$$(64)\qquad \begin{cases} a_0\mu'_{x_i} + a_1\mu''_{x_i} + \ldots\ldots + a_\rho\mu_{x_i}^{(\rho+1)} = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots\ldots \rho + 1) \end{cases}$$

$a_0$, $a_1$, ... $a_\rho$ étant des constantes.

Mais quand $\rho$ des âges sont donnés, le $(\rho + 1)^{me}$ se trouve déterminé à un facteur constant près, car on peut calculer les rapports de $\rho$ des constantes

$$a_0, a_1 \ldots\ldots a_\rho,$$

à l'une d'entre elles au moyen d'un système de $\rho$ équations linéaires : le $(\rho + 1)^{me}$ âge qui vérifie les $\rho + 1$ équations du système (64) est arbitraire et indépendant des $\rho$ premiers. La relation

$$a_0\mu'_x + a_1\mu''_x + \ldots + a_\rho\mu_x^{(\rho+1)} = 0$$

est donc satisfaite quel que soit $x$.

c. q. f. d.

M. Quiquet appelle les quantités $\xi$ les *actuariens* ; et il appelle *loi de survie d'ordre n* une loi de survie à l'aide de laquelle la probabilité de survie d'un groupe, au bout du temps $t$, puisse s'exprimer en fonction de $t$ et de $\rho$ actuariens seulement.

**44.** — Soit $\rho = 1$. On a alors

$$(65)\qquad a_0\mu'_x + a_1\mu''_x = 0$$

et deux cas sont possibles.

1er Cas. — On a :

$$\frac{a_0}{a_1} = -\tau \neq 0.$$

Si l'on pose $\mu'_x = e^{\alpha x}$, l'équation (65) devient

$$e^{\alpha x}\{\alpha - \tau\} = 0$$

d'où $\alpha = \tau$



En introduisant la constante d'intégration $k\tau$ nous obtenons :

$$\mu'_x = k\tau e^{\tau x}$$

$$\mu_x = ke^{\tau x} + C$$

et en posant

$$C = A,\ k = B,\ \tau = \log c.$$

$$\mu_x = A + Bc^x.$$

On obtient ainsi la formule de Makeham ($A \neq 0$) et celle de Gompertz ($A = 0$).

2e Cas. — On a $a_0 = 0$ [1]. L'équation devient

$$\mu''_x = 0$$

d'où

$$\mu'_x = \text{constante} = b$$

$$\mu_x = a + bx.$$

Aucun autre cas n'est possible : la propriété makehamienne définie par l'équation :

$$\frac{l_{x_1+t}}{l_{x_1}}\frac{l_{x_2+t}}{l_{x_2}}\ldots\frac{l_{x_r+t}}{l_{x_r}} = G(\xi, t)$$

appartient donc exclusivement aux formules démontrées aux nos 40 et 41.

**45.** — Soit $\rho = 2$. L'équation devient :

$$(66)\qquad a_0\mu'_x + a_1\mu''_x + a_2\mu'''_x = 0$$

et si l'on pose

$$\frac{a_0}{a_2} = b_2,\ \frac{a_1}{a_2} = b_1,\ \mu'_x = e^{\alpha x}$$

on en déduit :

$$e^{\alpha x}\{\alpha^2 + b_1\alpha + b_2\} = 0.$$

[1] La valeur 0 de $a_1$ est incompatible avec l'hypothèse $\rho = 1$.

Soient $\alpha_1$ et $\alpha_2$ les deux racines de l'équation caractéristique

$$\alpha^2 + b_1\alpha + b_2 = 0.$$

Etudions séparément les divers cas possibles.

1^er^ Cas. — $\alpha_1 \neq \alpha_2 \quad \alpha_1 \neq 0 \quad \alpha_2 \neq 0.$

En introduisant les constantes d'intégration $\gamma_1\alpha_1^2$, $\gamma_2\alpha_2^2$, on a :

$$(67)\qquad \begin{cases} \mu'_x = \gamma_1\alpha_1^2 e^{\alpha_1 x} + \gamma_2\alpha_2^2 e^{\alpha_2 x} \\ \mu_x = \beta + \gamma_1\alpha_1 e^{\alpha_1 x} + \gamma_2\alpha_2 e^{\alpha_2 x} \\ l_x = e^{k-\beta x-\gamma_1 c_1^x-\gamma_2 c_2^x} \end{cases}$$

en posant

$$\alpha_1 = \log c_1, \quad \alpha_2 = \log c_2, \quad \gamma_1\alpha_1 = \beta.$$

2^e^ Cas. — $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 \neq 0.$

En prenant pour constantes d'intégration $\alpha^2\gamma_1$ et $\alpha^2\gamma_2$, on a :

$$\begin{aligned} \mu'_x &= \alpha^2\gamma_1 e^{\alpha x} + \alpha^2\gamma_2 x e^{\alpha x} \\ \mu_x &= \alpha\gamma_1 e^{\alpha x} + \gamma_2(\alpha x - 1)e^{\alpha x} + k \end{aligned}$$

d'où l'on déduit aisément, en désignant les constantes qui figurent dans l'expression définitive par $k$, $k_1$, $k_2$, $k_3$ :

$$(68)\qquad l_x = e^{k-k_1 x-(k_2+k_3 x)c^x}.$$

3^e^ Cas. — $\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = \alpha \neq 0.$

On a alors, en représentant les constantes d'intégration par $2\beta_2$ et par $\gamma\alpha^2$ :

$$(69)\qquad \begin{cases} \mu'_x = 2\beta_2 + \gamma\alpha^2 e^{\alpha x} \\ \mu_x = \beta_1 + 2\beta_2 x + \gamma\alpha e^{\alpha x} \\ l_x = e^{\beta-\beta_1 x-\beta_2 x^2-\gamma c^x} \end{cases}$$

4^e^ Cas. — $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.$

On a alors :

$$(70)\qquad \begin{cases} \mu_x''' = 0 \\ \mu_x = \beta_1 + 2\beta_2 x + 3\beta_3 x^2 \\ l_x = e^{\beta-\beta_1 x-\beta_2 x^2-\beta_3 x^3} \end{cases}$$

La formule (67) avait déjà été obtenue empiriquement par Lazarus, qui l'avait appliquée à la table des 17 Compagnies anglaises et la formule (69) par Makeham, comme généralisation de la loi de Gompertz [1]. Ces deux formules et les formules (68) et (70) possèdent la propriété commune exprimée par la relation :



$$\frac{l_{x_1+t}}{l_{x_1}}\frac{l_{x_2+t}}{l_{x_1}}\cdots\frac{l_{x_r+t}}{l_{x_r}} = G(\xi_1, \xi_2, t).$$

M. Quiquet remarque que si les lois du premier ordre de Gompertz et de Makeham ne sont pas toujours aptes à traduire les données empiriques avec toute la précision désirable, au moins elles s'en rapprochent assez pour laisser supposer que de légères modifications les rendraient tout à fait aptes à l'interpolation des tables de survie : il ajoute que les fonctions du second ordre sont précisément une extension de celles du premier et qu'elles en sont très voisines et il conclut en remarquant que « c'est de leur côté qu'on a toute raison d'espérer rencontrer l'expression analytique de la loi naturelle de survie, latente sous la table numérique qu'ont fournie des observations directes [2] ». Il nous semble résulter des considérations du paragraphe précédent que par contre la loi de survie, en nous servant d'une expression concise de M. Bohlmann, est dans tous les cas imposée par le calculateur et non par la nature.

## XIII. — Ajustement analytique.

### II. — *L'ajustement d'après la loi de Gompertz-Makeham.*

**46.** — Des expressions connues :

$$(a)\qquad \begin{cases} l_x = ks^x g^{c^x} \\ p_x = sg^{(c-1)c^x} \end{cases}$$

[1] Lazarus. — *Ueber Mortalitätsverhältnisse und ihre Ursachen*; Hambourg, 1867. — Makeham. — *On the further development of Gompertz's law* (Journal of the Ist. of Act., XVIII).

[2] Quiquet. — *Représentation algébrique des tables de survie, généralisation des lois de Gompertz, Makeham, etc.* (Bull. de l'Inst. des Act. fr., vol. IV, fascicule 14, p. 150).

nous déduisons :

$$\log p_x = \log s + c^x(c-1)\log g \tag{71}$$

$$\Delta \log p_x = \log p_{x+1} - \log p_x = c^x(c-1)^2 \log g \tag{72}$$

$$\Delta \log p_{x+1} = \log p_{x+2} - \log p_{x+1} = c^{x+1}(c-1)^2 \log g$$

$$\left\{ \frac{\Delta \log p_{x+1}}{\Delta \log p_x} = c. \right. \tag{73}$$

En remplaçant $c$ par la valeur ainsi obtenue dans (72), nous pourrions obtenir $\log g$ et $g$ et les valeurs de $g$ et de $c$ portées dans (71) nous donneraient à leur tour $\log s$ et $s$. $k$ étant complètement arbitraire (ce n'est pas autre chose que le nombre initial des membres de la génération considérée), toutes les constantes qui figurent dans ($a$) seraient ainsi déterminées.

Mais ce procédé est défectueux : car la valeur de $c$ que nous choisissons n'étant qu'une valeur probable, les valeurs de $g$ et de $s$ qu'on en déduit seront aussi affectées d'erreurs. La concordance entre les valeurs $p_x$ observées et les valeurs calculées d'après la loi de Makeham n'étant d'ailleurs qu'approximative, il en résulte qu'il n'est pas indifférent, dans la détermination de $c$, de partir de tel ou tel âge. Il reste donc à trouver quelle est celle des valeurs de $c$ obtenues qu'il est préférable d'adopter.

On obtient une plus grande exactitude dans la détermination de $c$, et par suite des autres constantes, en ne se servant pas d'un âge unique, mais en cherchant au contraire à se servir d'un groupe de plusieurs âges, de façon à faire dépendre la valeur des constantes d'un nombre d'observations aussi grand que possible.

La méthode suivie par exemple dans l'ajustement des tables de risques normaux des 20 Compagnies anglaises est la suivante :

Soit $p(x, x+t)$ la probabilité pour que ($x$) soit encore en vie à l'âge $x+t$. On a évidemment :

$$\log p(x, x+t) = t \log s + c^x(c^t - 1)\log g$$



$$\sum_{x}^{x+t-1} \log p(x, x+t) = t\log s + (c^t - 1)\{c^x + c^{x+1} + \ldots c^{x+t-1}\}\log g =$$

$$= t \log s + \frac{(c^t-1)^2}{c-1} c^x \log g = u_x$$

$$\sum_{x+t}^{x+2t-1} \log p(x, x+t) = t \log s + \frac{(c^t-1)^2}{c-1} c^{x+t} \log g = u_{x+t}$$

$$\sum_{x+2t}^{x+3t-1} \log p(x, x+t) = t \log s + \frac{(c^t-1)^2}{c-1} c^{x+2t} \log g = u_{x+2t}$$

$$\Delta u_x = u_{x+t} - u_x = \frac{(c^t-1)^3}{c-1} c^x \log g$$

$$\Delta u_{x+t} = u_{x+2t} - u_{x+t} = \frac{(c^t-1)^3}{c-1} c^{x+t} \log g$$

$$\frac{\Delta u_{x+t}}{\Delta u_x} = c^t$$

d'où

$$\frac{\log \Delta u_{x+t} - \log \Delta u_x}{t} = \log c.$$

Les tentatives faites pour trouver les valeurs les plus avantageuses de $x$ et de $t$ ont donné les résultats suivants $x = 17$, $t = 88$ : on a donc déterminé les constantes en partant de ces valeurs (c'est-à-dire en s'appuyant sur les données relatives aux âges de 17 à 88 ans) [1].

**47.** — On peut enfin avoir recours à la méthode des moindres carrés en cherchant les valeurs des constantes $c$, $g$, $s$ rendant minimum

$$\sum h_x^2 \varepsilon_x^2$$

[1] Cf. *Text. Book of the English Actuaries*, cap. VI, §§ 18 et suivants.

où

$$\varepsilon_x = F(x, c, g, s) - q_x$$

et où $h_x^2$ désigne le poids correspondant aux valeurs de $q_x$ déterminées empiriquement et F la fonction de Gompertz-Makeham.

On applique alors les procédés indiqués au § V du chap. I [1].

## XIV. — Ajustement mécanique.

**48.** — Soient

$$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad \ldots$$

des valeurs équidistantes de la variable $u$ fournies par l'observation, $u'_x$ la valeur ajustée de $u_x$.

Un des procédés d'ajustement les plus simples consiste à prendre pour $u'_x$ la moyenne arithmétique entre $u_x$ et les quatre termes les plus voisins de $u_x$, c'est-à-dire :

$$u'_x = \frac{u_{x-2} + u_{x-1} + u_x + u_{x+1} + u_{x+2}}{5}.$$

Le procédé, appliqué de même à la série des valeurs de $u'_x$, fournit une nouvelle série de valeurs :

$$u''_x = \frac{u'_{x-2} + u'_{x-1} + u'_x + u'_{x+1} + u'_{x+2}}{5} =$$

$$= \frac{1}{25}\left[1(u_{x-4} + u_{x+4}) + 2(u_{x-3} + u_{x+3}) + \right.$$

$$\left. + 3(u_{x-2} + u_{x+2}) + 4(u_{x-1} + u_{x+1}) + 5u_x\right].$$

[1] Un exemple récent d'ajustement des logarithmes des probabilités de décès fondé sur la méthode des moindres carrés est celui du Dr Graf, qui a donné un ajustement nouveau des tables de survie des assurés en cas de mort des Compagnies françaises (Graf. — *Mitth. des österr-ung. Verbandes der Privat-Versicherungsanstalten*, Vienne 1904 et *Bollet. dell' Assoc. degli Attuari*, décembre 1904). On a ajusté également par la méthode des moindres carrés les probabilités de décès obtenues par l'expérience pour l'Union des employés de de la monarchie austro-hongroise (Vienne, 1890).



La valeur de $u_x$ ainsi ajustée se présente comme une fonction de $u_x$ et des 8 termes les plus voisins de $u_x$ et la série ainsi obtenue est naturellement plus régulière que la précédente. Ce procédé — dit procédé de *Finlaison* ou de *Wittstein* [1] — laisserait invariable une série de valeurs $u_x$ telle que l'on ait :

$$\Delta^2 u_{x-2} = \Delta u_{x-1} - \Delta u_{x-2} = (u_x - u_{x-1}) - (u_{x-1} - u_{x-2}) = 0$$

d'où :

$$u_{x-1} = \frac{1}{2}(u_x + u_{x-2}) :$$

suite qui est une progression arithmétique. La simplicité de ce procédé provient de la simplicité de l'hypothèse sur laquelle on s'appuie relativement à la fonction $u'$.

**49.** — Menons au contraire par les groupes de trois points suivants :

| | | |
|---|---|---|
| $u_{x-7}$ | $u_{x-2}$ | $u_{x+3}$ |
| $u_{x-6}$ | $u_{x-1}$ | $u_{x+4}$ |
| $u_{x-5}$ | $u_x$ | $u_{x+5}$ |
| $u_{x-4}$ | $u_{x+1}$ | $u_{x+6}$ |
| $u_{x-3}$ | $u_{x+2}$ | $u_{x+7}$ |

cinq paraboles du second degré et prenons pour valeur ajustée de $u_x$ la moyenne arithmétique des ordonnées des points d'intersection de ces paraboles avec l'ordonnée d'abscisse $x$ : ce procédé appliqué à la fonction $l_x$ qui exprime le nombre des vivants à l'âge $x$, et qu'on pourrait appliquer également à la fonction $q_x$, constitue la méthode bien connue d'ajustement de *Woolhouse*.

La formule d'interpolation correspondante s'obtient très aisément.

[1] Cf. Wittstein.— *Math. Stat. und deren Anwendung, etc.* Hanovre 1867, § 23. — D'une façon plus précise, l'ajustement de Finlaison est l'ajustement de Wittstein répété deux fois.

Posons :

$$y_{-1} = u_{x-5},\ y_0 = u_x,\ y_1 = u_{x+5},\ y_0 - y_{-1} = \Delta y_{-1},\ y_1 - y_0 = \Delta y_0,$$
$$\Delta y_0 - \Delta y_{-1} = \Delta^2 y_{-1}$$

et remarquons que l'équation

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$$

donne :

$$y_0 = \alpha,\ y_{-1} = \alpha - \beta + \gamma,\ y_1 = \alpha + \beta + \gamma$$

d'où

$$\Delta y_{-1} = \beta - \gamma\ ,\ \Delta y_0 = \beta + \gamma,\ \Delta^2 y_{-1} = 2\gamma$$

et

$$(74)\quad \begin{cases} y = y_0 + \left(\Delta y_0 - \dfrac{\Delta^2 y_{-1}}{2}\right)x + \dfrac{\Delta^2 y_{-1}}{2}\,x^2 = \\ \quad = y_0 + x\Delta y_0 + \dfrac{x(x-1)}{2}\Delta^2 y_{-1} \end{cases}$$

Remplaçons $y_0$ dans l'équation (74) successivement par $u_{x-7}$, $u_{x-6}$, ... $u_{x-3}$, $\Delta y_0$ par $u_{x-2} - u_{x-7}$, ..., $u_{x+2} - u_{x-3}$ et $\Delta y_1$ par $u_{x+3} - u_{x-2}$, $u_{x+4} - u_{x-1}$, ... et par suite $x$ par 7, 6, ... 3 : nous obtenons une valeur de $u_x$ pour chacune des cinq courbes ainsi définies et nous avons dit que la moyenne arithmétique des valeurs ainsi obtenues est prise comme valeur ajustée $u'_x$ de $u_x$ :

Si on effectue les calculs et qu'on remplace les différences premières et secondes par leurs valeurs en fonction des valeurs de la variable, on obtient comme expression de $u'_x$.

$$(75)\quad \begin{cases} u'_x = \dfrac{1}{125}\big[25u_x + 24(u_{x-1} + u_{x+1}) + 21(u_{x-2} + u_{x+2}) + \\ \quad + 7(u_{x-3} + u_{x+3}) + 3(u_{x-4} + u_{x+4}) - \\ \quad - 2(u_{x-6} + u_{x+6}) + 3(u_{x-7} + u_{x+7})\big] = \\ \quad = \dfrac{1}{5}\big[u_x + 0{,}96(u_{x-1} + u_{x+1}) + 0{,}84(u_{x-2} + u_{x+2}) + \\ \quad + 0{,}28(u_{x-3} + u_{x+3}) + 0{,}12(u_{x-4} + u_{x+4}) - \\ \quad - 0{,}08(u_{x-6} + u_{x+6}) + 0{,}12(u_{x-7} + u_{x+7})\big] \end{cases}$$



**50.** — Le procédé d'ajustement de Woolhouse, basé sur la considération des différences premières et secondes, laisserait invariable une suite de valeurs de $u_x$ formant une suite arithmétique du second degré. On démontre qu'il laisserait aussi invariable une suite arithmétique du troisième degré [1]; cette remarque conduirait à rejeter l'interpolation au moyen de paraboles du troisième degré : mais l'introduction des différences troisièmes peut servir à imposer aux arcs de paraboles menés par les groupes de points $u_{i-1}$, $u_i$, $u_{i+1}$ une nouvelle condition, grâce à laquelle ils remplissent mieux le but que doit atteindre l'ajustement.

Karup [2] se sert précisément de paraboles du troisième degré en les assujettissant à avoir un contact du premier ordre en leurs points d'intersection. Le procédé de Woolhouse donne en effet comme courbe ajustée une suite d'arcs de paraboles ayant des tangentes distinctes en leurs points d'intersection, d'où une irrégularité qui disparaît avec l'ajustement *osculateur* de Karup.

On veut que la parabole menée par les points $u_x$ et $u_{x+5}$ ait au point $u_x$ la même tangente que la parabole du second degré définie par $u_{x-5}$, $u_x$, $u_{x+5}$ et qu'elle ait au point $u_{x+5}$ la même tangente que la parabole du second degré définie par $u_x$, $u_{x+5}$, $u_{x+10}$ : la parabole cherchée devra donc remplir quatre conditions et son équation devra contenir 4 paramètres. Cette parabole aura donc une équation de la forme :

$$(76)\qquad y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$$

(1) Landré. — *Math. technische Kapitel zur Lebensversicherung*, Iéna, 1895, p. 73. — Plus généralement : une équation d'ajustement valable pour une parabole de degré $2n$ est toujours valable aussi pour une parabole de degré $2n + 1$. Cf. *Die Methoden der Ausgleichung von Massenerscheinungen* du Dr Ernst Blaschke, Vienne, 1893. p. 66 et suiv. et Landré. — *Ausgleichung mittels der Theorie des Minimums* dans le « Ehrenzweigs-Assekuranz-Jahrbuch », XXII, zweiter Theil, p. 38-40.

(2) *Ueber eine neue Ausgleichungsmethode* dans les « Transactions of the second intern. act. Congress », Londres, 1898, p. 31.

On a :

$$\frac{dy}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2.$$

Les tangentes aux points $u_x$ et $u_{x+5}$ auront donc pour coefficients angulaires B et $B + 10C + 75\,D$.

Mais d'autre part, si l'on pose :

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 \tag{77}$$

on a :

$$u_x = \alpha \qquad u_{x-5} = u_x - 5\beta + 25\gamma \qquad u_{x+5} = u_x + 5\beta + 25\gamma$$

d'où

$$\beta = \frac{u_{x+5} - u_{x-5}}{10}$$

et puisque $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}$ est égal à $\beta$ :

$$B = \beta.$$

En remplaçant dans (77) $u_{x-5}$, $u_x$ et $u_{x+5}$ respectivement par $u_x$, $u_{x+5}$ et $u_{x+10}$, on a de même

$$\frac{u_{x+10} - u_x}{10}$$

comme coefficient angulaire de la tangente au point $u_{x+5}$.

On a donc :

$$B = \frac{u_{x+5} - u_{x-5}}{10} \tag{78}$$

$$B + 10C + 75D = \frac{u_{x+10} - u_x}{10} \tag{79}$$

et en remplaçant dans (79) B par sa valeur tirée de (78) :

$$10C + 75D = \frac{u_{x+10} - u_{x+5} - u_x + u_{x-5}}{10}. \tag{80}$$

L'équation (76) donne :

$$u_{x+5} = u_x + 5B + 25C + 125D.$$



On en tire aisément en remplaçant B par la même valeur (78) :

$$\frac{u_{x+5} - 2u_x + u_{x-5}}{50} = C + 5D. \tag{81}$$

Les équations (80) et (81) résolues par rapport à C et à D donnent à leur tour :

$$C = \frac{-u_{x+10} + 4u_{x+5} - 5u_x + 2u_{x-5}}{50}$$

$$D = \frac{u_{x+10} - 3u_{x+5} + 3u_x - u_{x-5}}{250}$$

et, puisque l'on a :

$$A = u_x$$

$$B = \frac{u_{x+5} - u_{x-5}}{10},$$

on obtient finalement :

$$\left\{\begin{aligned} y &= u_x + \frac{u_{x+5} - u_{x-5}}{10}x + \\ &+ \frac{-u_{x+10} + 4u_{x+5} - 5u_x + 2u_{x-5}}{50}x^2 \\ &+ \frac{u_{x+10} - 3u_{x+5} + 3u_x - u_{x-5}}{250}x^3. \end{aligned}\right. \tag{82}$$

ou, si l'on pose :

$$u_x = u_0, \qquad u_{x\pm k5} = u_{\pm k5}, \qquad y = u_x$$

$$u_x = u_0 + \frac{u_{+5} - u_{-5}}{10}x + \frac{u_{10} + 4u_5 - 5u_0 + 2u_{-5}}{50}x^2 + \frac{u_{10} - 3u_5 + 3u_0 - u_{-5}}{250}x^3$$

équation qu'on peut écrire :

$$250u_x = -x(x-5)^2u_{-5} + (3x^3 - 25x^2 + 250)u_0 + (25x + 20x^2 - 3x^3)u_{-5} + (x^3 - 5x^2)u_{10}.$$

En donnant à $u_0$ les valeurs $u_x$, $u_{x-1}$, $u_{x-2}$, $u_{x-3}$, $u_{x-4}$ et par suite

à $x$ les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, l'équation précédente donne successivement :

$$(83)\quad \begin{cases} 250u_x = 250u_x \\ 250u_x = -16u_{x-6} + 228u_{x-1} + 42u_{x+4} - 4u_{x+9} \\ 250u_x = -18u_{x-7} + 174u_{x-2} + 106u_{x+3} - 12u_{x+8} \\ 250u_x = -12u_{x-8} + 106u_{x-3} + 174u_{x+2} - 18u_{x+7} \\ 250u_x = -4u_{x-9} + 42u_{x-4} + 228u_{x+1} - 16u_{x+6} \end{cases}$$

On en déduit la valeur ajustée $u'_x$ de $u_x$ en additionnant membre à membre les équations (83) et en divisant par 1250 :

$$(84)\quad \begin{cases} u'_x = 0{,}2u_x + 0{,}1824(u_{x-1} + u_{x+1}) + \\ \qquad + 0{,}1392(u_{x-2} + u_{x+2}) \\ + 0{,}0848(u_{x-3} + u_{x+3}) + 0{,}0336(u_{x-4} + u_{x+4}) \\ - 0{,}0128(u_{x-6} + u_{x+6}) + 0{,}0144(u_{x-7} + u_{x+7}) \\ - 0{,}0096(u_{x-8} + u_{x+8}) - 0{,}0032(u_{x-9} + u_{x+9}) \end{cases}$$

C'est la formule de Karup.

**51.** — La méthode d'ajustement de Wittstein-Finlaison vue précédemment est un cas particulier de la méthode de Higham [1] : ce dernier s'appuie sur la possibilité de remplacer une suite donnée par une suite obtenue en divisant par $p$ la somme de $p$ termes consécutifs de cette suite, puis en divisant par $q$ la somme de $q$ termes consécutifs de la suite ainsi obtenue, en divisant par $r$ la somme de $r$ termes consécutifs de la nouvelle suite et ainsi de suite. Cette substitution donne des résultats corrects jusqu'aux différences secondes et troisièmes.

Soient

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots$$

[1] *On the graduation of mortality tables*, « Journal of the Inst. of actuaries » vol. XXV.



les termes de la suite primitive. Posons :

$$S_p u_0 = u_0 + u_1 + \ldots u_{p-1}$$
$$S_{p,q} u_0 = S_p u_0 + S_p u_1 \ldots S_p u_{q-1}$$
$$S_{p,q,r} u_0 = S_{p,q} u_0 + S_{p,q} u_1 + \ldots + S_{p,q} u_{r-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

On trouve aisément que si l'on pose :

$$u_1 - u_0 = \Delta u_0, \quad u_2 - u_1 = \Delta u_1, \quad \Delta u_1 - \Delta u_0 = \Delta^2 u_0 \ldots$$

et si on convient de remplacer l'exposant de $\Delta$ dans le développement du binôme $(1 + \Delta)^n$ par l'indice exprimant l'ordre de la différence, on a :

$$S_p u_0 = u_0 \frac{(1+\Delta)^p - 1}{\Delta}$$
$$S_{p,q} u_0 = u_0 \frac{(1+\Delta)^p - 1}{\Delta} \cdot \frac{(1+\Delta)^q - 1}{\Delta}$$
$$S_{p,q,r} u_0 = u_0 \frac{(1+\Delta)^p - 1}{\Delta} \cdot \frac{(1+\Delta)^q - 1}{\Delta} \cdot \frac{(1+\Delta)^r - 1}{\Delta}.$$

La comparaison des expressions ainsi définies avec les expressions :

$$pu_0(1+\Delta)^{\frac{p-1}{2}}, \quad qu_0(1+\Delta)^{\frac{q-1}{2}}, \quad ru_0(1+\Delta)^{\frac{r-1}{2}},$$
$$(1+\Delta)^{\frac{p+q-2}{2}}$$

conduit à l'égalité :

$$u_0 \frac{(1+\Delta)^p - 1}{\Delta} \frac{(1+\Delta)^q - 1)}{\Delta} = p \cdot qu_0 \left[ (1+\Delta)^{\frac{p+q-2}{2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{p^2 + q^2 - 2}{2,3,4} \Delta^2 + \frac{(p^2 + q^2 - 2)(p + q - 4)}{2.3.4.2} \Delta^3 + \ldots \right] =$$
$$= Mu_0 \left\{ (1+\Delta)^{\frac{A-2}{2}} + \frac{B-2}{2.3.4} \Delta^2 + \frac{(B-2)(A-4)}{2.3.4.2} \Delta^3 + \ldots \right\}$$

où l'on a posé :

$$M = p \cdot q$$
$$A = p + q$$
$$B = p^2 + q^2.$$

On trouve d'une façon analogue, en désignant par M, A, B le produit, la somme et la somme des carrés de $p$, $q$, $r$ :

$$S_{p,q,r}\, u_0 = u_0 \frac{(1+\Delta)^p - 1}{\Delta} \frac{(1+\Delta)^q - 1}{\Delta} \frac{(1+\Delta)^r - 1}{\Delta} =$$

$$= M u_0 \left[ (1+\Delta)^{\frac{A-3}{2}} + \frac{B-3}{2.3.4} \Delta^2 + \frac{(B-3)(A-5)}{2.3.4.2} \Delta^3 + \ldots \right].$$

On démontre qu'en supposant cette relation vraie pour $n$ termes elle subsiste pour $n+1$ termes. En modifiant le sens de M, A, B d'une façon convenable, on a donc :

$$S_{p,q,r,t \ldots}\, u_0 = M u_0 \left\{ (1+\Delta)^{\frac{A-n}{2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{B-n}{2.3.4} \left( \Delta^2 + \frac{A - \overline{n+2}}{2} \Delta^3 \right) + \ldots \right\}$$

où $n$ désigne le nombre des sommations effectuées.

En négligeant les différences d'ordre supérieur au troisième et en remarquant que l'on a :

$$u_{\frac{A-n}{2}} = u_0 (1+\Delta)^{\frac{A-n}{2}}$$

on obtient :

$$u_{\frac{A-n}{2}} = \frac{S_{p,q,r,t \ldots}}{M} - \frac{B-n}{2.3.4} \cdot u_0 \left( \Delta^2 + \frac{A - \overline{n+2}}{2} \Delta^3 \right)$$

et la proposition énoncée au début est démontrée.

Si l'on pose simplement :

$$(85) \qquad u_{\frac{A-n}{2}} = \frac{S_{p,q,r,t \ldots}}{p.q.r.t \ldots}$$

on commet une erreur par excès ou par défaut suivant le sens de l'inégalité :

$$u_0 \left( \Delta^2 + \frac{A - \overline{n+2}}{2} \Delta \right) \lesseqgtr 0.$$



Les courbes de mortalité sont telles que le premier membre de l'inégalité est toujours positif. Il en résulte que la formule d'ajustement de Finlaison-Wittstein, qui se déduit de la formule (85) en posant $n = 2$, $p = q = 5$, fournit des valeurs ajustées trop fortes. Higham parvient à éliminer l'erreur provenant de l'application de la formule (85) en effectuant deux sommations différentes

$$S_{p,q,r \ldots}, \qquad S'_{p',q',r' \ldots}$$

pour lesquelles

$$A - n = A' - n'$$
$$u_{\frac{A-n}{2}} = u_{\frac{A'-n'}{2}}.$$

On a alors :

$$u_{\frac{A-n}{2}} = \frac{S_{p,q,r,t \ldots}}{M} - \frac{B-n}{2.3.4} u_0 \left( \Delta^2 + \frac{A - \overline{n+2}}{2} \Delta^3 \right)$$

$$u_{\frac{A'-n'}{2}} = \frac{S'_{p',q',r',t' \ldots}}{M'} - \frac{B'-n'}{2.3.4} u_0 \left( \Delta^2 + \frac{A' - \overline{n'+2}}{2} \Delta^3 \right)$$

d'où, en éliminant

$$\Delta^2 + \frac{A' - \overline{n'+2}}{2} \Delta^3$$

entre ces deux relations :

$$(86) \qquad u_{\frac{A-n}{2}} = \frac{\frac{S_{p,q,r,t}}{M}(B'-n') - \frac{S'_{p',q',r',t'}}{M'}(B-n)}{B' - B - (n'-n)}.$$

On a, par exemple, comme cas particulier de la relation (86), les formules d'ajustement suivantes :

$$u_8 = \frac{64\, S_{5,5,5,5}}{10.000} - \frac{4\, S_{5,5,5,9}}{300} = 0{,}2106\, u_0 + 0{,}192\,(u_1 + u_{-1})$$
$$+ 0.14186\,(u_{+2} + u_{-2}) + 0.07946\,(u_{+3} + u_{-3}) +$$
$$+ 0.024\,(u_{+4} + u_{-4}) - 0.0053\,(u_{+5} + u_{-5}) +$$
$$+ 0.016\,(u_6 + u_{-6}) - 0.0144\,(u_7 + u_{-7}) -$$
$$- 0.00693\,(u_{+8} + u_{-8})$$

$$u_3 = \frac{7S_{4.4} - 10S_7}{42} =$$

$$= \frac{18u_0 + 11(u_{+1} + u_{-1}) + 4(u_{+1} + u_{-2}) - 3(u_{+3} + u_{-3})}{42}$$

et une infinité d'autres qu'on déduit immédiatement de la formule (86) et qui sont, comme cette dernière, exactes jusqu'aux différences quatrièmes [1].

**52.** — Toutes les méthodes d'ajustement indiquées jusqu'ici, ainsi que beaucoup d'autres méthodes analogues, peuvent être considérées comme des cas particuliers de l'équation générale d'ajustement :

$$u'_x = p_0 u_x + p_1(u_{x+1} + u_{x-1}) + p_2(u_{x+2} + u_{x-2}) + \\ = p_3(u_{x+3} + u_{x-3}) + \dots$$

Landré [2] se propose de déterminer des valeurs $p_0$, $p_1$, $p_2$ telles que l'expression

$$\sqrt{p_0^2 + 2\{p_1^2 + p_2^2 + p^2_3 + \dots\}} \tag{87}$$

soit un minimum : le système des quantités $p$ est assujetti en outre à vérifier l'équation qui exprime que l'ajustement correspondant n'altère pas une suite de valeurs $u_x$ formant une suite arithmétique d'un degré choisi arbitrairement.

Supposons par exemple que ce degré soit le premier degré : les quantités $p$ doivent alors vérifier la relation unique :

$$p_0 + 2(p_1 + p_2 + \dots + p_n) = 1 \tag{88}$$

et rendre minimum l'expression (87) d'où il résulte :

$$p_0 = p_1 = \dots p_n = \frac{1}{2n+1}$$

[1] Cf. Higham. — *Loc. cit.*; Blaschke. — *Loc. cit.*, p. 81-85 et pour la méthode de Behm, relative à la correction de l'erreur provenant de l'adoption de la formule (85), pages 108 et suivantes.

[2] *Die Ausgleichung mittels der Theorie des Minimums*, déjà cité.



et

$$u'_x = \frac{1}{2n+1}\left[u_x + (u_{x-1} + u_{x+1}) + \right. \\ \left. + (u_{x-2} + u_{x+2}) + \dots (u_{x+n} + u_{x-n})\right]$$

qui comprend comme cas particuliers les formules de Finlaison-Wittstein ($n = 2$, $n = 12$).

Supposons au contraire que l'on ait $n = 9$ et que la parabole que l'on veut mener soit du troisième degré. Il s'agit de rendre minimum la quantité :

$$\sqrt{p_0^2 + 2(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_9^2)} = \varphi$$

en supposant les quantités $p$ liées par les équations :

$$\psi_0 = p_0 + 2(p_1 + p_2 + \dots p_9) - 1 = 0$$
$$\psi_1 = 1^2 p_1 + 2^2 p_2 + \dots 8^2 p_8 + 9^2 p_9 = 0.$$

Cela revient à rendre minimum la quantité

$$\varphi + k_0\psi_0 + k_1\psi_1$$

et on trouve comme formule d'ajustement :

$$u'_x = \frac{1}{2261}\left\{269u_x + 264u_{x-1} + u_{x+1}) + 249(u_{x+2} + u_{x-2})\right. \\ + 224(u_{x+3} + u_{x-3}) + 189(u_{x+4} + u_{x-4}) + \\ + 144(u_{x+5} + u_{x-5}) + 89(u_{x+6} + u_{x-6}) + 24(u_{x+7} + u_{x-7}) \\ - 51(u_{x+8} + u_{x-8}) - 136(u_{x+9} + u_{x-9})$$

à laquelle correspond pour

$$\sqrt{p_0^2 + 2(p_1^2 + p_2^2 + \dots)}$$

la valeur 0,345 [1].

[1] Bohlmann (*Ein Ausgleichungsproblem* dans les « Mitt. der Kön. Ges. der Wissenchaften » de Göttingue, 1899, 3) veut que l'ajustement vérifie la

**54.** — Une propriété commune à toutes les méthodes considérées jusqu'ici est la suivante : dans chacune de ces méthodes, l'équation d'ajustement

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$

($a_0$, $a_1$, ... $a_{n-1}$ étant des constantes) n'est pas autre chose que l'intégrale de l'équation aux différences finies :

$$\Delta^n y = 0.$$

Considérons maintenant une fonction quelconque d'une variable dépendant de $n$ constantes et supposons qu'on y remplace ces $n$ constantes par $n$ fonctions de la même variable : si ces fonctions varient très peu lorsque la variable parcourt un certain intervalle, on peut les considérer comme constantes dans l'intervalle. Il en résulte que, dans cet intervalle, la fonction pourra être déterminée d'une façon approchée par une équation différentielle (ou aux différences finies) ne contenant plus les $n$ fonctions.

Si dans un nouvel intervalle les $n$ fonctions varient de même insensiblement, l'équation proposée sera encore équivalente dans ce nouvel intervalle à une équation différentielle ou à une équation aux différences finies d'ordre $n$ qui coïncidera nécessairement avec l'équation relative au premier intervalle.

condition :

(1) $$A + \gamma^2 B = \text{minimum}$$

où l'on a posé :

$$A = \sum_{x=1}^{n} (\eta_x - \gamma_x)^2 \qquad B = \sum_{1}^{n-1} (\eta_{x+1} - \eta_x)^2$$

$\gamma_x$ et $\eta_x$ exprimant respectivement la valeur observée et la valeur ajustée ($x = 1, 2, \ldots n$) et $\gamma^2$ étant un nombre positif (poids).

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) soit vérifiée est la suivante :

$$\eta_n - \gamma_x = \gamma^2 (\Delta\eta_x - \Delta\eta_{x-1})$$

($\Delta\eta_0 = \Delta\eta_n = 0$).



Avec l'intégrale d'une équation différentielle ou d'une équation aux différences finies on peut toujours former une fonction quelconque, en remplaçant chacune des constantes de l'intégrale par une fonction de la variable indépendante : mais dans une première approximation, l'intégrale d'une équation différentielle (ou aux différences finies) d'ordre $n$ peut être considérée comme coïncidant avec une fonction de $n$ fonctions presque constantes dans un intervalle donné.

Les méthodes dont nous nous occupons actuellement sont basées sur cette remarque et leur degré de précision dépend du degré d'exactitude de l'hypothèse d'où elles sont déduites : elles n'ont une valeur scientifique que si on examine, avant de s'en servir, dans quelles limites elle sont applicables.

Si au contraire on se propose seulement d'obtenir un nivellement des suites fournies par l'observation, qu'on rejette en seconde ligne le but primitif de l'ajustement et qu'on n'ait en vue que divers résultats pratiques, sans rechercher d'ailleurs si les résultats d'observations antérieures prouvent que les méthodes choisies sont applicables, ces méthodes ne sont que de simples instruments mécaniques et n'ont plus aucune valeur scientifique [1].

## XV. — Ajustement graphique

**55.** — Soit $y$ une fonction déterminée $f$ de $x$ : portons sur l'axe des abscisses les différentes valeurs de la variable $x$ et sur les ordonnées des points ainsi obtenus portons les valeurs correspondantes de $y$ obtenues par l'observation ; si on suppose que la courbe définie par l'équation $y = f(x)$ est une courbe à allure simple, la dis-

[1] Cf. Blaschke. — *Loc. cit.*, p. 60, 86. — Je renvoie le lecteur à ce dernier travail pour une étude plus approfondie des méthodes d'ajustement : ces méthodes sont étudiées dans un esprit de généralisation qu'on chercherait en vain chez d'autres auteurs.

position présentée par l'ensemble des points $(x, y)$ sera d'autant plus régulière que les valeurs fournies par l'observation seront plus voisines des valeurs réelles de $y$ ou, en d'autres termes, que les observations auront été plus précises. L'ajustement graphique consiste à remplacer la ligne brisée obtenue en joignant successivement les points $(x, y)$ marqués dans le plan par une courbe continue et à allure régulière laissant ces points les uns au-dessus, les autres au-dessous, tout en s'en écartant le moins possible. On prend comme valeur de $y$, pour n'importe quelle valeur de la variable, l'ordonnée de la nouvelle courbe correspondant à cette valeur de la variable. On a non seulement ajusté ainsi le système primitif des données, mais on a même interpolé entre les divers nombres : l'interpolation consiste en effet, au point de vue géométrique, à déterminer une courbe qui contienne une série discontinue de points donnés.

Le procédé d'ajustement graphique est le plus général et le plus simple, mais c'est aussi celui pour lequel l'exactitude de l'ajustement dépend le plus de l'habileté de l'opérateur. Tandis que dans les autres méthodes la volonté du calculateur n'intervient plus après qu'il a choisi la méthode à suivre, dans l'ajustement graphique cette volonté intervient pendant toute l'opération. Cela peut être un avantage, car cela permet au calculateur de tenir compte dans la marche du phénomène de certaines particularités qui, avec d'autres méthodes, n'influeraient pas sur le résultat final ; mais c'est aussi un inconvénient, car, en l'absence d'une méthode, le résultat de l'opération dépend du jugement et même de l'état physique ou de l'habileté manuelle de l'ajusteur.

Cet inconvénient peut d'ailleurs être atténué.

Une des modifications employées à cet effet consiste, par exemple, à porter sur chaque ordonnée, au-dessus et au-dessous de la valeur observée, une longueur mesurant la précision de l'observation, un multiple de l'erreur moyenne, par exemple. Nous savons qu'on peut calculer la probabilité pour que la différence entre la valeur



*a priori* et la valeur *a posteriori* d'une probabilité mathématique ne dépasse pas un certain multiple de l'erreur moyenne. La série des valeurs observées se trouve ainsi encadrée entre deux autres séries de valeurs (la série des valeurs observées augmentées d'un multiple de l'erreur moyenne et la série des valeurs observées diminuées du même multiple de l'erreur moyenne) qui s'en écartent plus ou moins suivant la précision plus ou moins grande de chaque observation. Le calculateur sait alors qu'il ne doit pas sortir de la zone d'erreur définie par les deux séries qui servent ainsi à guider plus sûrement sa main.

## XVI. — Relevé des données statistiques

**56.** — Nous avons vu qu'on est conduit à grouper les observations de plusieurs Compagnies d'assurances, car il est indispensable d'avoir des données matérielles étendues comme base d'une table de mortalité de groupes assurés. Mais ce groupement n'est possible que si ces observations sont homogènes : il faut d'abord que l'objet même de la statistique soit homogène et on présume qu'il en est bien ainsi lorsqu'il s'agit de groupes contemporains appartenant à une même nation, mais il faut en outre qu'il y ait homogénéité dans la forme des relevés statistiques, c'est-à-dire que les relevés soient faits d'après un système unique, de façon que la définition de chaque unité et son mode de recensement soient identiques pour les diverses Compagnies.

Le choix de telle ou telle unité n'est nullement indifférent, ni en ce qui concerne le mode de recensement et la possibilité d'éviter les erreurs provenant des individus assurés plusieurs fois et à des Compagnies différentes, ni en ce qui concerne la valeur logique des données définitives.

Au point de vue de la statistique de la vie humaine, il serait

particulièrement important de prendre l'individu comme unité, mais il faut alors que chaque personne soit l'objet d'un relevé unique, quel que soit le nombre des assurances qu'elle a contractées. Si on fait correspondre une fiche à chaque unité, il faut qu'on puisse remplacer ensuite les fiches établies par les diverses Compagnies auxquelles la personne est assurée par une fiche unique qui les résume d'après des principes posés une fois pour toutes d'une façon claire.

Si on choisit comme unité la police d'assurance, chaque personne est comptée autant de fois qu'il y a de polices la concernant; si on choisit la sélection, elle est comptée autant de fois qu'elle a été soumise à un examen médical à la suite duquel elle s'est assurée ; si on choisit la somme, elle est comptée autant de fois qu'elle s'est assurée ou qu'il y a eu des modifications dans le montant des assurances contractées par elle.

Les règles concernant le mode de recensement sont naturellement celles qu'on applique à tout relevé statistique. On attribue à chaque unité (quelle que soit l'unité choisie) une fiche contenant tous les renseignements qui peuvent servir à identifier cette unité, le sexe, l'âge au moment du contrat, la durée de l'opération, la cause de la fin de l'opération (mort, échange, etc.), la cause de la mort, le montant et la forme du contrat d'assurance, etc. (1).

## XVII. — Aperçu sur quelques tables de mortalité de groupes assurés

**57.** — Sans parler de la table de *Halley* (1693), qui fut employée par des Compagnies d'assurances mais qui provenait d'observations faites sur la population de la ville de Breslau, nous

(1) Cf. Czuber. — *Loc. cit.*, pages 383-386.



citerons (1) parmi les tables les plus anciennes concernant des groupes assurés celle de Kersseboom et celle de Deparcieux :

*Kersseboom* (1691-1771), se servant de statistiques dressées par l'administration hollandaise des rentes viagères, suit le groupe des individus qui entrent en possession de leur rente à un même âge et étudie l'élimination de ce groupe, en résumant les données dans une table unique. Pour la première année de vie, il se sert des données relatives à l'ensemble des populations de la Hollande et de la Frise occidentale.

Des deux tables de *Deparcieux* (1703-1768) l'une concerne les religieux et les religieuses de divers couvents de Paris, l'autre les membres (au nombre de 10 000 environ) des tontines fondées en 1689, 1696, 1734. La table de Deparcieux, concernant des rentiers et par suite des têtes choisies, présente néanmoins des coefficients de mortalité élevés, surtout pour les âges extrêmes (elle s'arrête à 94 ans). Les Compagnies françaises qui l'adoptèrent durent modifier à plusieurs reprises les primes déduites de cette table.

Parmi les tables postérieures aux précédentes, et concernant également des groupes assurés, citons celles de l'*Equitable Society* de Davis (1825), de de Morgan (1834), de Finlaison père (1829 et 1860), de Finlaison fils (1867), des Compagnies écossaises (1869) : on peut les considérer comme n'ayant plus actuellement qu'une valeur historique.

Parmi les tables de mortalité modernes, déduites d'observations très étendues et employées très souvent à l'heure actuelle, citons les *tables des dix-sept Compagnies anglaises* (2) suivies un peu plus

(1) Pour une énumération plus complète des tables de mortalité nous renvoyons aux traités de statistique générale, par exemple à Virgili. — *Statistica*. Hœpli, 1898, p. 104 ou à Landré. — *Loc. cit.*, p. 97 et pour des renseignements très détaillés à Westergaard. — *Die Lehre der Mortalität, etc.*, déjà cité.

(2) *Tables exhibiting the law of mortality deduced from the combined experience of 17 Life assurances offices*. London, 1843.

de vingt-cinq ans plus tard par les *tables des vingt Compagnies anglaises* (1) qui sont classiques.

Elles concernent :

La table $H^M$ (*healthy males lives*) les risques normaux (hommes bien portants assurés en cas de mort) ;

La table $H^F$ (*healthy female lives*) les femmes bien portantes assurées en cas de mort ;

La table $H^{MF}$ (*healthy male and female lives*) les personnes bien portantes assurées en cas de mort, sans distinction de sexe ;

La table $H^{M(5)}$ (*healthy male lives, omitting the first five years of assurance*) la mortalité des hommes bien portants à partir de la cinquième année d'assurance (c'est-à-dire quand l'influence de la sélection initiale est neutralisée).

La célèbre table $H^M$ concerne 130243 têtes et 20251 décès : elle a été ajustée d'abord par la méthode de Woolhouse et elle a été étendue plus tard (1887) aux âges au-dessous de 10 ans (omis primitivement) et ajustée par la formule de Makeham.

Les *tables des vingt-trois Compagnies allemandes* (2) comprennent les tables M.I, W.I, M.u.W.I qui concernent respectivement les hommes, les femmes, les hommes et femmes assurés à la suite d'un examen médical complet et dans des conditions normales ;

Les tables MII, WII, MuWII qui concernent les hommes, les femmes, les hommes et femmes assurés à la suite d'un examen médical complet, mais moyennant des primes supplémentaires :

Les tables M.III, W.III, Mu.WIII qui concernent les hommes, les femmes, les hommes et femmes assurés à la suite d'un examen médical seulement partiel ;

(1) *The mortality experience of life assurance companies, collected by the Institute of actuaries.* London, 1863.

(2) *Deutsche Sterblichkeitstafeln aus den Erfahrungen von 23 Lebensversicherungsgesellschaften, veröffentlicht im Auftrage des Kollegiums für Lebensversicherungsgesellschaft zu Berlin.* Berlin, 1883.



Les tables M.IV, W.IV, Mu.W.IV qui concernent les hommes, les femmes, les hommes et femmes assurés sans examen médical.

Ces tables, ajustées par Zillmer, comprennent une population assurée de 858500 individus.

Les *tables des quatre Compagnies françaises* (1) concernent :

La table A. F. (assurés français), les assurés en cas de mort à la suite d'un examen médical complet et dans des conditions normales ;

La table R. F. (rentiers français) les rentiers viagers français.

La première comprend 229143 têtes et 22617 décès. Elle a été ajustée par la formule de Makeham et les valeurs des constantes figurant dans cette formule ont été corrigées par la méthode des moindres carrés.

Les *nouvelles tables anglaises de mortalité* (2), basées sur les observations de trente années (1863-1893), divisent les assurés en trois catégories principales :

*a*) assurés en cas de mort ;

*b*) assurés en cas de vie et de mort (par des opérations *mixtes*) ;

*c*) rentiers viagers.

Elles prennent, comme les tables précédentes, pour base de la classification le sexe et la sélection médicale : mais elles en diffèrent surtout en ce qu'elles tiennent aussi compte du fait que les conditions particulières à chaque opération (mode de paiement des primes, durée de l'opération, participation ou non aux bénéfices) répondent aux besoins variés de classes de la population différentes au point de vue économique et déterminent une troisième espèce de sélection (outre la sélection médicale et l'auto-sélection) que nous avons déjà nommée sélection sociale.

(1) *Tables de mortalité du comité des compagnies d'assurances à primes fixes sur la vie*, Paris, 1895.

(2) *Combined experience of assured lives* (1863-1893) *collected by the institute of actuaries and the faculty of actuaries in Scotland.* London, 1900, vol. I ; *Whole life assurances, males*, vol. II ; *Whole life assurances, females*, vol. III ; *Endowment assurances and minor classes of assurance, males and females*, vol. IV.

Ces tables se divisent en *select-tables* dans lesquelles les bases de la classification sont l'âge et la durée de l'opération et en *aggregate-tables* dans lesquelles on tient compte de l'âge seulement.

C'est ainsi que nous trouvons, pour les assurances en cas de mort des assurés mâles :

1. Des *select-tables* basées sur les données d'opérations d'une durée de 0 à 9 ans, contenant les probabilités de décès pour chaque âge séparément et pour des groupes quinquennaux d'âges et divisées en deux suivant qu'il y a ou non participation aux bénéfices.

2. Des *aggregate-tables* basées sur les données concernant les opérations contractées avant le 1er janvier 1863, après le 1er janvier 1863 ou à d'autres époques déterminées. Ces dernières sont elles-mêmes classées suivant la durée de l'opération : elles concernent les opérations contractées depuis plus de 5, 6, ..., 10 ans, de manière à mettre en lumière la neutralisation graduelle de l'influence de la sélection; elles sont divisées en deux, comme les précédentes, suivant qu'il y a ou non participation aux bénéfices.

Pour les opérations en cas de vie des assurés hommes et femmes, nous trouvons :

1. Des *select-tables* ordonnées suivant l'âge initial et suivant l'âge au moment de l'observation.

2. Des *aggregate-tables* concernant toutes les opérations ou les opérations contractées depuis plus de 5 ans ou de 10 ans [1] [2].

[1] Au sujet des nouvelles tables anglaises, voir Czuber. — « Mittheilungen des Verbandes für österr. und ung. Versicherungstechniker » (résumé dans le « Bolletino degli Attuari », nos 12, 13) et « Zeitschrift für die Ges. Versicherungswissenchaft », *Neuere Sterblichkeits-Untersuchungen an Versicherten* » juillet 1905.

[2] Il n'y a pas de table de mortalité déduite de l'expérience des Compagnies italiennes. La table de mortalité de la population italienne, que nous avons déjà citée, a été élaborée par la Direction générale de la statistique d'après les données de la période de douze ans 1876-1887. L'ajustement de cette table a donné lieu à quelques travaux de valeur de MM. Armenante, Perozzo et d'autres auteurs, parus dans l'*Archivio di Statistica*.



## XVIII. — Légitimité de l'existence d'une probabilité de décès : théorie de la dispersion.

**58.** — L'axiome énoncé au début d'après lequel il y a pour tout individu $(x)$ d'un groupe une probabilité $p(x, x+m)$ fonction de $x$ et de $m$ pour que l'individu d'âge $x$ soit vivant à l'âge $x+m$ est-il légitime? Autrement dit : les résultats auxquels on parvient en partant de cet axiome ne sont-ils pas en contradiction avec les manifestations réelles du phénomène de la mortalité? Il est évident que s'il en est ainsi, une théorie fondée sur cet axiome peut bien être vraie, en ce sens que les raisonnements peuvent ne jamais conduire à des résultats en contradiction avec l'axiome ou contradictoires entre eux, mais que cette théorie doit être considérée comme dépourvue de toute valeur au point de vue des applications.

Supposons qu'il y ait la probabilité $p$ pour qu'un événement E ait lieu et qu'on fasse $s$ épreuves : nous avons vu que la probabilité pour que E ait lieu $n$ fois est :

$$\varphi(n) = \binom{s}{n} p^n (1-p)^{s-n}.$$

Nous avons vu aussi que si on suppose $s$ très grand et que dans plusieurs séries de $s$ expériences l'événement ait eu lieu $n_1, n_2, \ldots n_m$ fois, ces derniers nombres se groupent autour de leur valeur la plus fréquente :

$$n = sp$$

(qui coïncide actuellement avec la valeur probable $n^o$ de $n$) suivant une loi qui est la loi des erreurs de Gauss :

$$(a) \qquad \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(n_i - n)^2} \; (i = 1, 2, \ldots).$$

Nous dirons qu'il y a *dispersion normale* si le mode de groupe-

ment est celui qui est défini par $(a)$ et nous dirons de même qu'un certain mode de groupement autour de la valeur la plus fréquente présente une *dispersion sous-normale* ou *sur-normale* suivant que les écarts entre les nombres $n_1$, $n_2$, ... et le nombre $n$ se présentent avec une fréquence plus faible ou plus forte que celle définie par $(a)$.

Pratiquement cette définition revient à celle-ci : il y a dispersion normale, sur-normale ou sous-normale suivant que l'erreur moyenne ou la moyenne arithmétique des erreurs correspondant à une série d'épreuves sont égales, supérieures ou inférieures [1] à celles qu'aurait données, toutes choses égales d'ailleurs une série présentant des probabilités variant suivant la formule $(a)$.

Autrement encore : désignons par $m$ l'erreur moyenne

$$\sqrt{\int_{+\infty}^{+\infty} (n_i - n)^2 \varphi(n_i - n)\, d(n_i - n)}$$

définie par $(a)$, par $\mu$ l'erreur moyenne effective

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} (n_i - a)^2}{n - 1}}$$

où l'on a posé :

$$a = \frac{n_1 + n_2 + \dots n_n}{n}$$

et soit :

$$Q = \frac{\mu}{m}.$$

Il y a dispersion normale, surnormale ou sous-normale suivant que l'on a : $Q = 1$, $Q > 1$, $Q < 1$ [2].

[1] Au lieu de l'erreur moyenne on peut considérer la constante de précision et il faut dire alors « suivant que les constantes de précision correspondant à une série d'épreuves sont égales, inférieures ou supérieures, etc. ».

[2] Pour de plus amples détails sur la théorie de la dispersion et sur la bibliographie à ce sujet, voir : Broggi. — *Di un problema fondamentale di stat. investigatrice*, dans le « Giorn. d. Ec. », mai 1904.



Il est maintenant évident que si l'on veut savoir si un phénomène présente une probabilité constante, il suffit, pour résoudre la question, de chercher si ce phénomène présente une dispersion normale.

**59.** — Peut-on affirmer qu'il en est bien ainsi en ce qui concerne la mortalité ?

Les premières recherches effectuées à ce sujet par Dormoy et par Lexis semblèrent fournir une réponse nettement négative à cette question.

Le premier de ces auteurs détermina, pour la population de la France, le coefficient de dispersion du rapport du nombre annuel de décès à la population totale et il trouva 8,6 pour la période de 10 ans 1849-1858 et 6,3 pour la période de 10 ans 1859-1868. Mais Dormoy ne tenait pas compte de ce fait que l'hypothèse d'une probabilité de décès variable avec l'âge est en contradiction avec la détermination d'un coefficient de dispersion commun à tous les âges et il en résulte qu'on ne peut attribuer aucune valeur à ses recherches.

Les recherches faites par Lexis sont au contraire inattaquables : il a trouvé pour la population de la Belgique et pour l'âge zéro un coefficient de dispersion voisin de 9.

Des recherches plus récentes faites par le hollandais Peek, tout en montrant que les résultats de Lexis sont dignes d'attention, conduisent à une conclusion assez différente au sujet du caractère de la dispersion propre à la mortalité.

M. Peek [1] se sert des données fournies par l'excellente statistique démographique de la Hollande et détermine le coefficient de dispersion pour chaque âge exprimé par un nombre entier d'années, pour la période de 10 ans 1880-1889.

[1] *Das Problem vom Risiko in der Lebensversicherung*, par le Dr J.-H Peek dans le « Zeitschrift für Versicherungsrecht und Wissenchaft » Bd. V, 1899, p. 169.

Il trouve, par exemple :

| Age $x$ | Coefficient de dispersion Q | Age $x$ | Coefficient de dispersion Q | Age $x$ | Coefficient de dispersion Q |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 6.46 | 9 | 1.19 | 50 | 1.56 |
| 1 | 4.57 | 10 | 0.82 | 60 | 1.12 |
| 2 | 3.68 | 20 | 1.25 | 70 | 2.24 |
| 3 | 3.84 | 30 | 1.28 | 80 | 0.97 |
| 5 | 2.52 | 40 | 1.43 | 90 | 0.81 |
| 7 | 1.84 | | | | |

Tandis que dans les premiers âges la dispersion est nettement sur-normale, le coefficient de dispersion oscille ensuite autour de la valeur 1, sans s'en écarter beaucoup : la dispersion caractérisée par ce coefficient peut donc être considérée comme normale.

M. Bohlmann a repris les recherches de M. Peek, au séminaire de science des assurances de l'Université de Goettingue et, ayant constaté qu'elles sont également dignes d'attention en ce qui concerne la population de l'Allemagne, il a déterminé les coefficients de dispersion propres à des groupes assurés. Les données qu'il communique [1] sont contenues dans le tableau de la page suivante.

Si donc on n'est pas encore en possession d'un ensemble de recherches permettant de donner une réponse nettement favorable ou nettement contraire à l'application des principes du calcul des probabilités à la théorie de la mortalité, les recherches précédentes semblent montrer que cette application (si on exclut les premiers âges) est plutôt légitime.

[1] *Ueber Versicherungsmathematik* dans « Klein und Riecke, etc. », p. 142.



*Tableau de M. Bohlmann*

| Gotha (1869-1880) | | Leipzig (1880-1894) | |
|---|---|---|---|
| Age $x$ | Coefficient de dispersion Q | Age $x$ | Coefficient de dispersion Q |
| 26 — 30 | 0.8 | 21 1/2 — 25 1/2 | 0.9 |
| 31 — 35 | 0.8 | 26 " — 30 " | 1.0 |
| 36 — 40 | 1.3 | 31 " — 35 " | 1.8 |
| 41 — 45 | 0.9 | 36 " — 40 " | 1.5 |
| 46 — 50 | 0.9 | 41 " — 45 " | 1.1 |
| 51 — 55 | 0.8 | 46 " — 50 " | 0.8 |
| 56 — 60 | 1.2 | 51 " — 55 " | 1.2 |
| 61 — 65 | 1.0 | 56 " — 60 " | 1.1 |
| 66 — 70 | 1.0 | 61 " — 65 " | 0.9 |
| 71 — 75 | 1.1 | 66 " — 60 " | 0.9 |
| 76 — 80 | 1.2 | 71 " — 75 " | 1.0 |
| 81 — 85 | 1.1 | 76 " — 80 " | 1.1 |
| 86 — 90 | 1.1 | 81 " — 88 " | 1 |

# CHAPITRE III

—

## DÉMONSTRATION DE QUELQUES FORMULES RELATIVES AUX OPÉRATIONS FINANCIÈRES

### I. — Intérêts et escomptes.

**1.** — Soit $i$ l'intérêt produit par l'unité de capital pendant l'unité de temps (année) : supposons que les intérêts produits par le capital initial s'ajoutent au capital et produisent à leur tour de nouveaux intérêts à la fin de chaque période de $m$ années.

Le capital 1 devient alors après $n = km$ années :

(1) $$(1 + mi)^k \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

et après $n = km + r$ années $(r < m)$

(2) $$(1 + mi)^k \quad (1 + ri).$$

En posant $m = 1$, l'expression (2) devient

$$(1 + mi)^k (1 + ri) \qquad 0 < r < 1$$

ou, en considérant $(1 + ri)$ comme une expression approchée de $(1 + i)^r$ et en écrivant $n$ à la place de $n + r$ :

(3) $$(1 + i)^n$$

formule qui exprime le montant du capital unité après un intervalle de temps $n$ ($n$ étant entier ou fractionnaire), lorsque le mode de capitalisation est celui qu'on appelle *à intérêts composés*.



De même, si dans l'expression (2) on remplace $m$ par $\frac{1}{m}$ (d'où $nm = k + rm$), on obtient :

$$\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m(n-r)}(1 + ri)$$

qui devient

(4) $$\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn}$$

lorsqu'on suppose l'expression (1) valable aussi bien pour $k$ fractionnaire que pour $k$ entier.

Si la loi de capitalisation est la loi exprimée par (2) et si $k = 0$, l'expression (2) devient

(5) $$1 + ri$$

et elle définit alors la capitalisation dite à *intérêt simple* : d'après cela c'est cette formule qui s'applique toujours au cas où la période pour laquelle on calcule l'intérêt a une durée inférieure à celle de la période à la fin de laquelle on suppose effectuée la capitalisation des intérêts.

**2.** — On a évidemment :

$$\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m > 1 + i.$$

En supposant que les intérêts soient capitalisés à la fin de chaque fraction $\frac{1}{m}$ d'année, on demande à quel taux $j_{(m)}$ on doit placer un capital pour que l'on ait :

(6) $$\left(1 + \frac{j_{(m)}}{m}\right)^m = 1 + i.$$

On tire aisément de cette équation :

(7) $$j_{(m)} = \{(1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1\}$$

L'équation (7) est la relation qui existe entre le taux de la capitalisation effectuée à la fin de chaque fraction $\frac{1}{m}$ d'année et le taux annuel de la capitalisation (c'est pourquoi $j_{(m)}$ s'appelle taux *correspondant* à $i$) : si on remplace $m$ par $\frac{1}{m}$ dans cette équation, on trouve :

$$j_{\left(\frac{1}{m}\right)} = \frac{1}{m}\{(1+i)^m - 1\}. \tag{8}$$

C'est le taux $j_{\left(\frac{1}{m}\right)}$ auquel il faudrait employer un capital à intérêt simple pour que après $m$ années il ait la même valeur que le même capital capitalisé chaque année au taux $i$.

**3.** — L'équation (6) donne :

$$\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^m 1 = +i$$

et comme

$$\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = e^x$$

(où $e$ est la base des logarithmes népériens) on a :

$$\lim_{m=\infty} e^{j_{(m)}} = 1 + i$$

ou, si l'on pose

$$\lim_{m=\infty} j_{(m)} = \delta$$

($\delta$ = intensité de la capitalisation)

$$e^{\delta} = 1 + i \tag{9}$$

$$\delta = \frac{\log(1+i)}{\log e} = \log(1+i) \tag{10}$$

(les logarithmes étant des logarithmes népériens).



Si la durée de la capitalisation est de $n$ années et si on suppose qu'on effectue cette capitalisation à la fin de périodes infiniment petites et au taux $\delta$ (*capitalisation continue*), le capital 1 devient $e^{\delta n}$. On a en général $e^{in} > 1 + i$, même lorsque $i$ est le taux de la capitalisation continue.

**3bis.** — Soit M la valeur acquise par le capital $c$ au bout du temps $n$. Nous avons vu que l'on a :

$$M = c(1+ni)$$
$$M = c(1+i)^n$$
$$M = c\left(1+\frac{i}{m}\right)^{nm}$$

suivant que la capitalisation est supposée faite à intérêt simple, à intérêt composé et à la fin de chaque année, ou à intérêt composé au taux $\frac{i}{m}$ à la fin de chaque fraction $\frac{1}{m}$ d'année. On en déduit, pour M = 1 :

$$\begin{cases} c = \dfrac{1}{1+ni} \\ c = (1+ni)^{-n} \\ c = \left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{-nm} \end{cases} \tag{11}$$

C'est l'expression de la *valeur actuelle* (ou *valeur escomptée*) d'un capital unité différé de $n$ années, dans le cas de l'escompte simple ou de l'escompte composé.

On appelle *escompte* la quantité $1 - c$. Nous représenterons la valeur escomptée et l'escompte du capital 1 payable dans un an par les notations suivantes

$$\frac{1}{1+i} = v$$
$$d = 1 - v = iv.$$

Les formules (11) seront considérées comme applicables aussi aux valeurs non entières de $n$.

**4.** — $i$ est d'habitude une fraction assez petite de l'unité : il est égal à 0,05, 0,04 ... suivant que le taux est de 4 %, 5 % ... Le calcul de $j_{(m)}$ ou de $\delta$ connaissant $i$, ainsi que le calcul de $\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}$ pour les valeurs négatives ou fractionnaires de $n$, peut donc être effectué d'une façon suffisamment approchée en réduisant à leurs premiers termes les séries infinies au moyen desquelles on peut exprimer ces quantités.

En remplaçant dans la formule (7) $(1+i)^{\frac{1}{m}}$ par son développement :

$$(1+i)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{i}{m} - \frac{m-1}{2!\,m^2}i^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{3!\,m^3}i^3 - \ldots$$

on a par exemple :

$$(12)\quad \begin{cases} j_{(m)} = i - \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right)i^2 + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(2-\frac{1}{m}\right)i^3 - \\ \qquad - \frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(2-\frac{1}{m}\right)\left(3-\frac{1}{m}\right)i^4 + \ldots \end{cases}$$

Le développement en série de $\log(1+i)$ permet de remplacer de même la formule (10) par la suivante :

$$(13)\qquad \delta = i - \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} - \frac{i^4}{4} + \ldots$$

On sait que, dans une série alternée, l'erreur commise en négligeant les termes qui suivent le $n^e$ est inférieure à la valeur absolue du $(n+1)^{ème}$ terme.

Le nombre de termes qu'il est nécessaire de prendre dans les séries (12) et (13) dépend naturellement de la nature du problème : par exemple l'erreur commise dans le calcul de $\delta$ en prenant :

$$\delta = i - \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} - \frac{i^4}{4}$$

est, pour

$$i = 0{,}04, \text{ inférieure à } 0{,}00000002048$$



et pour

$$i = 0{,}05 \text{ inférieure à } 0{,}0000000625$$

quantités absolument négligeables. Dans certains cas, il suffit même de ne prendre que trois termes et même on peut se borner souvent à poser :

$$\delta = i\left(1 - \frac{i}{2}\right).$$

## II. — Payements périodiques.

**7.** — La valeur d'une rente, rapportée à un instant donné, est la somme des valeurs actuelles, rapportées au même moment, d'une suite finie ou infinie de payements revenant périodiquement.

Les rentes prennent des noms particuliers suivant la durée de la période qui sépare un payement du suivant : c'est ainsi qu'il y a des rentes annuelles ou *annuités*, des rentes *semestrielles*, *mensuelles*, etc. ; la rente est *anticipée* ou *échue* suivant que l'échéance de chaque payement a lieu au début ou à la fin de chaque période, *immédiate* ou *différée* suivant qu'elle commence à courir immédiatement ou seulement après un certain nombre de périodes, *temporaire* ou *perpétuelle* ; elle est dite d'*amortissement* si le moment auquel sa valeur est rapportée est antérieur à l'échéance du premier terme ou coïncide avec cette échéance, de *constitution de capital* si ce moment est postérieur à l'échéance du dernier terme ou coïncide avec cette échéance.

**6.** — La détermination de la valeur d'une rente dont le montant est constant se ramène au calcul de la somme des termes d'une progression géométrique. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'une annuité égale à 1, immédiate, payable pendant $n$ années par termes échus ; sa valeur actuelle est :

$$(14)\qquad v + v^2 + \ldots + v^n = \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{d}$$

ou si l'annuité est payable par anticipation :

$$(15) \qquad 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{1 - v} = \frac{1 - v^n}{i}.$$

Plus généralement : si on calcule la valeur de la rente après un intervalle de temps $h$ ($h$ positif ou négatif) les expressions (14) et (15) deviennent

$$(16) \qquad (1 + i)^h \frac{1 - v^n}{i}$$

$$(17) \qquad (1 + i)^h \frac{1 - v^n}{d}.$$

Pour $h = 0$ on retrouve les expressions précédentes. Pour $h = n$ on trouve la valeur de la rente, rapportée à la fin de la $n^e$ année : cette valeur est

$$(18) \qquad \frac{r^n - 1}{i}$$

ou

$$(19) \qquad \frac{r^n - 1}{d}$$

(en posant $1 + i = r$) suivant que l'annuité est échue ou anticipée.

**8.** — Si les termes de la rente sont supposés payables à des époques espacées d'une fraction $\frac{1}{m}$ d'année, les expressions (14) et (15) deviennent respectivement :

$$(20) \qquad v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + \ldots + v^n = v^{\frac{1}{m}} \frac{1 - v^n}{1 - v^{\frac{1}{m}}}$$

$$(21) \qquad 1 + v^{\frac{1}{m}} + \ldots + v^{n - \frac{1}{m}} = \frac{1 - v^n}{1 - v^{\frac{1}{m}}}.$$

**9.** — Supposons $n = \infty$. On a :

$$(22) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1 - v^n}{i} = \frac{1}{i} - \lim_{n=\infty} \frac{1}{i(1 + i)^n} = \frac{1}{i}.$$



La valeur du capital correspondant à une rente perpétuelle, payable par termes échus, coïncide donc avec l'inverse du taux de l'intérêt et décroît, lorsque le taux croît, d'autant moins rapidement que le taux est plus fort. On a en effet :

$$\frac{d\left(\frac{1}{i}\right)}{di} = -\frac{1}{i}, \quad \frac{d^2\left(\frac{1}{i}\right)}{di^2} = +\frac{2}{i^2}.$$

On peut démontrer aisément que, même pour $n$ fini, la valeur actuelle de la rente est une fonction décroissante du taux de l'intérêt. Il suffit de remarquer que l'on a :

$$V = \frac{1 - v^n}{i} = \frac{1}{i}\left\{1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right\} =$$

$$n - \frac{n(n+1)}{1.2} i + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} i^2 - \ldots,$$

$$\frac{dV}{di} = -\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.3} i -$$

$$- \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.4} i^2 + \ldots$$

La série étant convergente, le signe de $\frac{dV}{di}$ coïncide avec le signe du premier terme de la série. On a donc

$$\frac{dV}{di} < 0$$

En différentiant de nouveau, on trouve de même

$$\frac{d^2V}{di^2} > 0.$$

La vitesse avec laquelle V décroît est donc une fonction décroissante de $i$, pour les rentes temporaires comme pour les rentes perpétuelles.

**9.** — L'étude de la variation de V en fonction de $i$ se rattache au problème de la détermination du taux de l'intérêt tiré de la

formule :

$$V = \frac{1 - v^n}{i}$$

formule qu'on peut mettre évidemment sous la forme ;

$$V = \frac{r^n - 1}{r^n(r-1)}$$

$$(23) \qquad V r^{n+1} - (V + 1) r^n + 1 = 0$$

où $r = 1 + i$.

Le calcul effectif de $r$ et par suite de $i$ est ainsi ramené à la résolution d'une équation de degré $n + 1$. Ce calcul n'est donc possible qu'en appliquant les méthodes d'approximation employées dans la recherche des racines d'une équation numérique de degré supérieur, méthodes qui conduisent à des calculs assez laborieux.

Dans la pratique il convient de diriger le calcul autrement : on détermine des valeurs de V comprenant la valeur donnée et correspondant à des taux connus (ces valeurs de V sont les unes supérieures, les autres inférieures à la valeur donnée, $n$ étant bien entendu supposé constant), puis on détermine le taux inconnu au moyen d'une interpolation.

Il est préférable de prendre pour base de l'interpolation non pas les valeurs de V déterminées effectivement, mais leurs inverses.

La raison de ce choix est évidente pour les annuités perpétuelles: l'équation (22) nous montre en effet que, lorsque la valeur de l'annuité varie en progression arithmétique, le taux varie en progression harmonique et réciproquement, de sorte que à la moyenne arithmétique d'un ensemble de valeurs de la première quantité correspond la moyenne harmonique des valeurs correspondantes de la seconde. Mais les courbes représentées par les équations

$$Vi = 1$$

qui correspond à $n = \infty$) et

$$Vr^{n+1} - (V + 1) r^n + 1 = 0$$

(qui correspond à $n$ fini)



sont toutes deux convexes par rapport à l'axe des $i$ et admettent cet axe pour asymptote (car V est nul pour $i$ infini) : elles ont donc (sauf pour les valeurs de $i$ voisines de zéro) une forme qui peut être considérée *grosso modo* comme la même pour les deux courbes.

Si $V_1$ et $V_2$ sont les valeurs correspondant aux taux $i_1$ et $i_2 = i_1 + h$, une simple interpolation linéaire entre $\frac{1}{V_1}$ et $\frac{1}{V_2}$ fournit déjà une approximation suffisante pour la valeur de $i$ correspondant à V ($V_1 < V < V_2$), si l'on a :

$$h \leqslant 0{,}005$$

On trouve ainsi :

$$(24) \qquad i = i_1 - \frac{i_1 - i_2}{\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}} \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{V_1}\right)$$

Pour des valeurs plus grandes de $h$, il convient d'avoir recours pour l'interpolation à des courbes de degré supérieur au premier degré.

Le calcul est beaucoup facilité par l'emploi de tables donnant la valeur des annuités pour des taux variant par intervalles assez petits.

**10.** — Il peut être intéressant, pour certains usages pratiques, de considérer des payements périodiques dont le montant varie linéairement.

Soit une rente dont le montant initial à la fin de la première période de durée $\frac{1}{m}$ est $\frac{1}{m}$ et qui croit à la fin de chaque période $\frac{1}{m}$ de façon à atteindre la valeur $n$ à la fin de la $n^e$ année, après quoi elle cesse d'être payée.

La valeur V de cette rente s'exprime évidemment par :

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{m} v^{\frac{1}{m}} + \frac{2}{m} v^{\frac{2}{m}} + \ldots + \frac{nm-1}{m} v^{\frac{nm-1}{m}} + \\ & \qquad + \frac{nm}{m} v^{\frac{nm}{m}} = V = \\ & = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m} \left\{ 1 + 2 v^{\frac{1}{m}} + \ldots (nm-1) v^{\frac{nm-2}{m}} + mnv^{\frac{nm-1}{m}} \right\}. \end{aligned} \right.$$

L'identité

$$1 + x + \dots x^k = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x},$$

donne par différentiation :

$$(26) \qquad 1 + 2x + \dots kx^{k-1} = \frac{1 - (k+1)x^k + kx^{k+1}}{(1-x)^2}.$$

En portant dans l'expression (25) la valeur fournie par l'équation (26) pour $k = nm$, $x = v^{\frac{1}{m}}$ nous obtenons, après quelques simplifications faciles :

$$(27) \qquad V = \frac{v^{\frac{1}{m}} = \left\{ 1 + nm\left(1 - v^{\frac{1}{m}}\right) \right\} v^{n+\frac{1}{m}}}{m\left(1 - v^{\frac{1}{m}}\right)^2}$$

A $m = 1$ correspond l'hypothèse d'une annuité échue, croissant chaque année de 1 unité depuis 1 jusqu'à $n$ et la formule (27) devient :

$$(28) \qquad V = \frac{v - (1 + nd)v^{n+1}}{d^2}$$

Si on calculait la valeur de la rente, à la fin de la $n^e$ année, ou obtiendrait les expressions suivantes au lieu des expressions (27) et (28) :

$$(29) \qquad V = \frac{r^{n-\frac{1}{m}} - v^{\frac{1}{m}} - nm\left(1 - v^{\frac{1}{m}}\right)v^{\frac{1}{m}}}{m\left(1 - v^{\frac{1}{m}}\right)^2}$$

et

$$(30) \qquad V = \frac{r^n - 1 - nd}{i^2 v}$$

On les déduit de (27) et de (28) en multipliant par $r^n$ : la multiplication par $r^{\frac{1}{m}}$ ou par $r$ nous aurait donné la valeur initiale des mêmes rentes, lorsqu'on les suppose payables par termes anticipés au lieu de termes échus.



**11.** — Le problème de la détermination de la valeur d'une rente périodique dont le montant décroît linéairement de $\frac{1}{m}$ à chaque terme depuis $\frac{nm}{m}$ jusqu'à $\frac{1}{m}$ se ramène au problème traité au numéro précédent si l'on remarque que l'on a :

$$\frac{nm}{m} v^{\frac{1}{m}} + \frac{nm-1}{m} v^{\frac{2}{m}} + \dots + \frac{1}{m} v^{\frac{nm-1}{m}} =$$

$$\frac{1}{m} v^{n+\frac{1}{m}} \left\{ nmr^{\frac{nm}{m}} + (nm-1) r^{\frac{nm-1}{m}} + \dots + 1\, r^{\frac{1}{m}} \right\}.$$

On trouve ainsi la valeur suivante :

$$(31) \qquad \frac{v^n + nm\left(v^{-\frac{1}{m}} - 1\right) - 1}{m\left(v^{-\frac{1}{m}} - 1\right)^2}$$

et

$$(32) \qquad \frac{v^n + ni - 1}{i^2}$$

pour le cas de $m = 1$.

# DEUXIÈME PARTIE

## PROBLÈMES FONDAMENTAUX DE LA THÉORIE MATHÉMATIQUE DES ASSURANCES SUR LA VIE

## CHAPITRE PREMIER

### MÉTHODES USUELLES DE CALCUL

#### I. — Observations préliminaires.

**1.** — Le problème mathématique fondamental de la Science des Actuaires consiste à déterminer la valeur d'un payement de montant S, qui doit avoir lieu après un temps $n$ si un ou plusieurs individus donnés sont vivants à ce moment — ou encore si un ou plusieurs individus donnés sont morts à ce moment — ou enfin si, parmi les membres d'un groupe donné, les uns (déterminés ou non) sont morts et les autres vivants.

Nous appellerons opération d'assurance toute opération réductible au type précédent, individus assurés ou têtes des individus dont la mort ou la vie à un certain moment entraîne le payement de la somme, assureur celui qui est tenu au payement de la somme assurée S et nous classerons les assurances d'après les diverses conditions auxquelles est subordonné le payement de la somme.

Pour la solution du problème nous supposerons qu'on n'a pas d'autres éléments que les suivants : d'une part les données conte-

nues dans une table de survie, c'est-à-dire le nombre $l_x$ des vivants à un âge $x$ exprimé par un nombre entier d'années pour un groupe de $l_0$ nouveaux-nés et d'autre part la valeur des coefficients de capitalisation ou d'escompte

$$\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}, \qquad \left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn},$$

dans lesquels $\frac{i}{m}$ exprime l'intérêt rapporté par l'unité de capital pendant l'intervalle de temps $\frac{1}{m}$.

**2.** — On peut classer les opérations d'assurance d'après le nombre des individus assurés : on a ainsi la division connue de ces opérations en opérations concernant les personnes isolées et opérations concernant plusieurs personnes ou plusieurs groupes.

On peut encore classer les opérations d'assurance en opérations en cas de vie et opérations en cas de mort, suivant que le payement de la somme assurée dépend de la vie ou de la mort.

Cette distinction est fondamentale et décisive en ce qui concerne l'assurance d'individus isolés. Elle n'est pas toujours possible au contraire, lorsqu'il s'agit de groupes assurés, car l'assurance peut alors être considérée comme une assurance en cas de vie pour certains membres du groupe et comme une assurance en cas de mort pour d'autres membres.

**3.** — On peut prendre enfin comme base de la classification la possibilité ou l'impossibilité d'évaluer les engagements de l'assureur en prenant comme base les éléments indiqués plus haut et sans avoir recours à des hypothèses supplémentaires.

La première classe comprendra toutes les opérations pour lesquelles ceci est possible et la seconde classe les autres opérations. Il est évident que la seconde classe comprend les opérations qui exigent la connaissance de la probabilité de décès (ou de survie)



pour des périodes de temps ne contenant pas un nombre entier d'années ou à des âges ne s'exprimant pas par un nombre entier d'années.

Les probabilités pour que l'individu $(x)$ d'âge $x$ soit en vie ou soit mort à l'âge $x+n$

$$_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}, \quad _nq_x = 1 - {}_np_x$$

ne peuvent en effet s'obtenir par une table de survie que si $n$ et $x$ sont entiers et le nombre des vivants à un âge exprimé par un nombre fractionnaire d'années ne peut s'obtenir qu'en faisant, au sujet de la fonction $l$, une hypothèse permettant de déduire ce nombre des valeurs prises par cette fonction $l_x$ lorsque $x$ est entier.

Il résulte de là que la seconde classe comprend toutes les opérations dans lesquelles le payement de la somme assurée est subordonné à la vie ou à la mort des assurés à la fin d'une période qui ne s'exprime pas par un nombre entier d'années. La réciproque n'est pas vraie, sauf pour les assurances sur une tête unique : lorsque le nombre des individus assurés est supérieur à l'unité, le payement de la somme assurée peut être subordonné à la vie ou à la mort des assurés au bout d'une période égale à un nombre entier d'années, sans qu'il soit possible pour cela de déterminer la probabilité indépendamment de toute hypothèse supplémentaire.

C'est ce qui arrive lorsque le capital assuré doit être versé dans le cas où, au cours d'une période d'un nombre entier d'années, un ou plusieurs individus appartenant à un groupe sont (ou ne sont pas) morts antérieurement à d'autres individus du même groupe.

**4.** — Bornons-nous à l'exemple suivant : soit un groupe $(x, y)$ composé des individus $(x)$ et $(y)$ d'âges respectifs $x$ et $y$ ($x$ et $y$ entiers) ; supposons que le capital (S) doive être payé à la

fin de la première année d'assurance si à la fin de cette année $(x)$ est vivant et $(y)$ mort ou encore si tous deux étant morts au cours de l'année, le décès de $(y)$ a précédé celui de $(x)$.

La probabilité pour que $(x)$ soit en vie à l'âge $(x+1)$ et la probabilité pour que $y$ meure avant d'avoir atteint l'âge $y+1$ sont respectivement :

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \qquad q_y = \frac{d_y}{l_y}$$

en posant

$$l_y - l_{y+1} = d_y.$$

Les probabilités étant supposées indépendantes, la probabilité correspondant à la première des éventualités de l'énoncé sera :

$$p_x q_y = \frac{l_{x+1} d_y}{l_x l_y}.$$

On l'obtient rigoureusement à l'aide d'une table de survie.

Il en est autrement pour la probabilité correspondant à la deuxième éventualité de l'énoncé : nous pouvons seulement fixer des limites entre lesquelles cette probabilité doit être comprise.

La limite supérieure s'obtient en supposant que $(y)$ meure au commencement de l'année : la probabilité demandée est alors identique à la probabilité pour que les deux individus meurent tous les deux au cours de l'année, sans tenir compte de l'ordre de succession des décès ; elle est égale à

$$\frac{d_x}{l_x}\frac{d_y}{l_y} = q_x q_y.$$

La limite inférieure s'obtient en supposant que $(y)$ meure à la fin de l'année : la possibilité que $(x)$ meure au cours de l'année et après $(y)$ est alors exclue et la probabilité demandée est alors zéro.

En l'absence de toute nouvelle hypothèse sur la forme de $l$ on peut interpoler arbitrairement entre ces limites o et $q_x q_y$.

Il est en effet évident que le problème précédent ne peut pas être



identifié avec le suivant : on demande la probabilité pour que, ayant choisi deux points A et B au hasard sur un segment, A se trouve à gauche de B (c'est-à-dire précède B). Il y a ici deux cas également possibles : A peut précéder B, B peut précéder A. La probabilité demandée est $\frac{1}{2}$. Dans le problème actuel, si les âges sont différents, les probabilités pour que $(x)$ et $(y)$ vivent pendant un temps déterminé seront aussi différentes. En l'absence d'une détermination de ces probabilités pour des périodes différentes de un an, rien ne nous autorise à faire abstraction de cette différence entre les deux probabilités.

**5.** — Les probabilités fondamentales concernent un évènement qui doit avoir lieu dans un intervalle de temps donné et ne nous donnent aucun élément qui puisse servir à fixer le mode de distribution de plusieurs événements analogues dans cet intervalle : il en résulte que nous pouvons introduire à volonté certaines restrictions relatives à la forme des fonctions considérées entre les limites extrêmes de l'intervalle et choisir ces restrictions de façon à préciser la solution de problèmes qui sans cela seraient indéterminés.

Par exemple, on peut admettre la continuité des fonctions fondamentales. On substitue ainsi aux fonctions discontinues d'une variable continue (le temps) d'autres fonctions continues qui remplissent l'une des deux conditions suivantes

*a*) se rapprocher le plus possible des fonctions données ;

*b*) avoir la forme la plus simple possible,

et qui aient en commun avec les fonctions données les points correspondant aux valeurs entières de la variable.

La condition *a*) est remplie par exemple par l'interpolation au moyen de la fonction de Gompertz-Makeham et d'autres fonctions analogues : les probabilités fondamentales et les valeurs des diverses sortes d'assurances sont alors déterminées par des intégrations entre certaines limites et les seules difficultés qu'on ait à surmonter sont celles qui sont inhérentes à ces intégrations.

L'hypothèse la plus simple possible est au contraire celle d'une variation linéaire des fonctions considérées à l'intérieur de tout intervalle (*hypothèse de de Moivre*).

On peut aussi laisser de côté toute espèce d'hypothèse au sujet des fonctions elles-mêmes : en supposant qu'on puisse déterminer deux valeurs $a$ et $b$ entre lesquelles soit comprise la valeur cherchée $x$, on prend :

$$x = \frac{a+b}{2}$$

(*principe de Cauchy*) : de la sorte on rend minima l'erreur la plus grande possible.

### II. — Détermination des probabilités fondamentales.

**6.** — La valeur qu'il faut attribuer à une somme S qu'on pourra toucher dans $n$ années, si un évènement de probabilité $p$ a eu lieu à ce moment, est

$$Spv^n$$

$$\left(\text{où l'on pose } v = \frac{1}{1+i}\right).$$

En effet si on suppose $c$ assurances semblables (contractées pour la même somme et la même durée et subordonnées à la réalisation d'évènements de même probabilité) le payement de la somme S aura probablement lieu pour $cp$ de ces assurances et par suite la somme totale déboursée par l'assureur dans $n$ années sera $Scp$ : la valeur actuelle de cette somme est :

$$Spcv^n$$

et comme les assurances sont semblables, la valeur actuelle de chacune d'elles est :

$$\frac{Spcv^n}{c} = Spv^n.$$



Dans les assurances sur la vie on doit déduire des données fournies par une table de survie

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{r} l_x\ l_{x+1}\ l_{x+2}\ \dots \\ l_x - l_{x+1} = d_x,\ d_{x+1},\ d_{x+2}\ \dots \\ \dfrac{l_{x+1}}{l_x} = p_x,\ p_{x+1},\ p_{x+2}\ \dots \\ 1 - p_x = q_x,\ q_{x+1},\ q_{x+2}\ \dots \end{array}\right.$$

les probabilités $p$ correspondant à l'éventualité à laquelle est subordonné le payement de la somme S par l'assureur à la fin du temps $n$.

Plus généralement, supposons que aux valeurs

$$1,\ 2,\ \dots\ n$$

de $n$ correspondent les sommes $S_1$, $S_2$, ... $S_n$ et les probabilités $p_1$, $p_2$, ... $p_n$ : la valeur actuelle de l'opération ainsi définie peut toujours se ramener à une sommation de la forme :

$$(2)\qquad S_1p_1v + S_2p_2v^2 + \dots + S_np_nv^n.$$

**7.** Supposons qu'il s'agisse d'assurances sur une tête unique ($x$) d'âge $x$ ($n$ et $x$ [1] étant supposés entiers), Le payement de la somme $S_n$ peut être subordonné à l'une des éventualités suivantes :

*a*) que $x$ atteigne l'âge $x+n$ ;

*b*) qu'il ne l'atteigne pas ;

*c*) qu'ayant atteint l'âge $x+n-1$ il n'atteigne pas l'âge $x+n$.

Ce sont seulement les éventualités *a*) et *c*) qu'il importe de considérer dans la pratique : désignons par ${}_np_x$ et par ${}_{n-1}|q_x$ les probabilités correspondantes. On a évidemment :

$${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x},\ {}_{n-1}|q_x = \frac{d_{x+n-1}}{l_x}.$$

[1] Dans la pratique on remplace l'âge réel $x'$ d'un assuré par sa partie entière $x$ ou par $x+1$ suivant que $x'-x$ est inférieur ou supérieur à $\frac{1}{2}$.

On en déduit immédiatement à cause des relations (1)

$$(3)\qquad {}_np_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}\frac{l_{x+2}}{l_{x+1}}\cdots\frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}} = p_x p_{x+1}\cdots p_{x+n-1},$$

$$(4)\qquad {}_{n-1}|q_x = {}_{n-1}p_x - {}_np_x = {}_{n-1}p_x q_{x+n-1},$$

et, si l'on pose

$${}_nq_x = 1 - {}_np_x$$

$$(5)\qquad {}_nq_x = q_x + {}_1|q_x + {}_2|q_x + \cdots {}_{n-1}|q_x.$$

On a des assurances en cas de vie ou en cas de mort suivant que dans l'expression (2) on remplace $p_n$ par ${}_np_x$ ou par ${}_{n-1}|q_x$.

**8.** — Dans le cas de groupes assurés, la distinction des divers cas à examiner est naturellement plus compliquée.

Soit un groupe $(x_1, x_2, \ldots x_m)$ formé de $m$ individus $(x_1)$, $(x_2)$, ... $(x_m)$. Désignons par ${}_np_{x_1x_2\ldots x_m}$ la probabilité pour que, au bout de $n$ années, aucun des $m$ membres du groupe ne soit mort et par ${}_nq_{x_1, x_2, \ldots x_m}$ la probabilité pour que, au bout de $n$ années, aucun des $m$ membres du groupe ne soit en vie. Entre les deux hypothèses extrêmes de la conservation totale et de l'extinction totale du groupe il y a toutes les autres éventualités possibles : l'un des individus mort et tous les autres survivants, ... , $m - 1$ des individus morts et le $m^e$ survivant.

**9.** — Soit à trouver la probabilité

$${}_np\,\frac{[r]}{x_1x_2\ldots x_m} = P_r$$

pour que, sur $m$ têtes $(x_1)$ $(x_2)$ ... $(x_m)$, il y en ait $r$ en vie au bout de $n$ années.

La probabilité pour que les individus

$$(x_1), (x_2), \ldots (x_r)$$

survivent et que les autres soient morts est :

$$(6)\qquad \begin{cases} {}_np_{x_1, x_2\ldots x_r}\,{}_nq_{x_{r+1}, x_{r+2}\ldots, x_m} = \\ = {}_np_{x_1, x_2\ldots x_r}\left(1 - {}_np_{x_{r+1}}\right)\left(1 - {}_np_{x_{r+2}}\right)\cdots\left(1 - {}_np_{x_m}\right) \end{cases}$$



La probabilité $P_n$ demandée s'exprimera par la somme :

$$(7)\qquad \Sigma\,{}_np_{x_1, x_2\ldots x_r}\left(1 - {}_np_{x_{r+1}}\right)\left(1 - {}_np_{x_{r+2}}\right)\cdots\left(1 - {}_np_{x_m}\right)$$

étendue aux $\binom{m}{r}$ valeurs possibles du produit (6), dont chacune exprime la probabilité de survie de $r$ personnes déterminées choisies parmi les $m$ personnes données.

On voit aisément que dans le développement de (7) les produits qui expriment la probabilité de survie de $r$ têtes figurent chacun une fois et une fois seulement, tandis que les produits exprimant la probabilité de survie d'un nombre de têtes supérieur à $r$ y figurent plusieurs fois.

Désignons par A, le nombre de fois que la probabilité ${}_np_{x_1x_2\ldots x_{r+s}}$ figure dans le produit et représentons par $Z_{r+s}$ la somme $\Sigma\,{}_np_{x_1x_2\ldots x_{r+s}}$ $\left(\text{étendue aux } \binom{m}{r+s}\right.$ combinaisons possibles de $m$ éléments $r+s$ à $r+s\Big)$. L'expression (7) devient :

$$(8)\qquad P_r = Z_r + A_1Z_{r+1} + A_2Z_{r+2} + \ldots\ldots + A_{m-r}\,Z_m.$$

Comme $A_1, A_2, \ldots A_{m-2}$ sont indépendants des quantités ${}_np_{xi}$, on peut supposer pour un instant ces quantités égales entre elles et égales à $p$. L'expression (7) devient alors :

$$(9)\qquad \begin{cases} \binom{m}{r}p^r(1-p)^{m-r} = \\ \binom{m}{r}p^r - \binom{m}{r}\binom{m-r}{1}p^{r+1} + \binom{m}{r}\binom{m-r}{2}p^{r+2} - \\ - \ldots + (-1)^r\binom{m}{r}\binom{m-r}{m-r}p^m \end{cases}$$

Mais on a aussi, dans ce cas où les quantités ${}_np_{xi}$ sont égales :

$$Z_r = \binom{m}{r}p^r,\ Z_{r+1} = \binom{m}{r+1}p^{r+1}\ldots Z_m = p^m$$

et l'expression (8) peut s'écrire :

$$\binom{m}{r} p^r + A_1 \binom{m}{r+1} p^{r+1} +$$

$$(10) \qquad + A_2 \binom{m}{r+r} p^{r+r} + \dots A_{m-r} p_m.$$

En comparant les expressions (9) et (10), on obtient :

$$(11) \quad \begin{cases} A_1 = -\binom{m}{r}\binom{m-r}{1}\dfrac{1}{\binom{m}{r+1}} = -\binom{r+1}{1} \\ A_2 = \binom{m}{r}\binom{m-r}{2}\dfrac{1}{\binom{m}{r+2}} = \binom{r+2}{2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{m-r} = (-1)^{m-r}\binom{m}{m-r} \end{cases}$$

et, en portant dans (8) les valeurs (11), on a :

$$(12) \quad \begin{cases} P_r = Z_r - \binom{r+1}{1} Z_{r+1} + \binom{r+2}{2} Z_{r+2} - \dots + \\ +(-1)^{m-r}\binom{m}{m-r} Z_m \qquad (^1) \end{cases}$$

On voit aisément que si on remplace les indices des quantités Z par des exposants de même valeur et si l'on convient de poser :

$$Z_{m+1} = Z_{m+2} = \dots = 0,$$

l'expression (12) prend la forme symbolique :

$$(13) \qquad \frac{Z^r}{(1+Z)^{r+1}}.$$

**10.** — La probabilité

$$(14) \qquad \frac{r}{{}_np x_1 x_2 \dots x_m}$$

(1) Czuber. *Loc. cit.*, page 56 ; Cf. aussi *Text-Book*, ch. II, §§ 27-32 et surtout Toia. *Sofra alcune formole del calcolo delle probabilità* (*Boll. degli Att.* n° 12) qui démontre les formules du texte d'une façon très élégante.



pour que, sur $m$ têtes, $r$ au moins survivent au bout de $n$ années s'obtient évidemment en faisant la somme des probabilités pour que $r$ têtes, $r+1$ têtes, ... $m$ têtes survivent.

La probabilité (14) pourrait donc se déduire de la somme des probabilités ${}_np \dfrac{[r]}{x_1 x_2 \dots x_m} = P_r$ définies par l'équation (12) dans laquelle on remplacerait $r$ successivement par $r$, $r+1$, $r+2$ ... en tenant compte de relations bien connues d'analyse combinatoire (1).

Mais on est conduit plus rapidement au résultat en continuant à se servir de cacul symbolique. Remarquons que l'on a :

$${}_np \frac{r}{x_1\, x_2 \dots x_m} - {}_np \frac{r+1}{x_1\, x_2 \dots x_m} = {}_np \frac{[r]}{x_1\, x_2 \dots x_m}$$

d'où

$$(15) \qquad {}_np \frac{r}{x_1\, x_2 \dots x_m} - {}_np \frac{[r]}{x_1\, x_2 \dots x_m} = {}_np \frac{r+1}{x_1\, x_2 \dots x_m}$$

et que :

$${}_np \frac{0}{x_1\, x_2 \dots x_m} = 1$$

$${}_np \frac{[0]}{x_1\, x_2 \dots x_m} = \frac{Z^0}{1+Z} = \frac{1}{1+Z}$$

On a alors immédiatement :

$${}_np \frac{1}{x_1\, x_2 \dots x_m} = 1 - \frac{1}{1+Z} = \frac{Z}{1+Z}$$

$${}_np \frac{2}{x_1\, x_2 \dots x_m} = \frac{Z}{1+Z} - \frac{Z}{(1+Z)^2} = \frac{Z^2}{(1+Z)^2}$$

et on voit de suite que si on a démontré la relation

$$(16) \qquad {}_np \frac{r}{x_1\, x_2 \dots x_m} = \frac{Z^r}{(1+Z)^r}$$

pour une certaine valeur de $r$, elle subsiste lorsque $r$ est remplacé par $r+1$.

(1) Cf. Poterin du Motel. — *Loc. cit.*, p. 61.

On a en effet :

$$\frac{Z^r}{(1+Z)^r} - \frac{Z^r}{(1+Z)^{r+1}} = \frac{Z^{r+1}}{(1+Z)^{r+1}}$$

**11.** — Soient, par exemple, trois têtes $(x)$, $(y)$, $(z)$. La probabilité pour que toutes survivent est :

$${}_np_{x,y,z} = {}_np_x\, {}_np_y\, {}_np_z$$

et la probabilité pour que aucune ne survive est :

$$\begin{aligned} {}_nq_{xyz} &= (1 - {}_np_x)(1 - {}_np_y)(1 - {}_np_z) = \\ &= 1 - ({}_np_x + {}_np_y + {}_np_z) + \\ &+ ({}_np_{x,y} + {}_np_{x,z} + {}_np_{yz}) - {}_np_{xyz} \end{aligned}$$

C'est bien la probabilité qu'on obtiendrait par le développement de $\frac{1}{1+Z}$.

La probabilité pour que les trois têtes ne soient pas mortes toutes les trois (c'est-à-dire pour que l'une au moins survive) est le complément de la précédente :

$$\begin{aligned} 1 - {}_nq_{xyz} &= {}_np_x + {}_np_y + {}_np_z - \\ &- ({}_np_{xy} + {}_np_{xz} + {}_np_{yz}) + {}_np_{xyz} \end{aligned}$$

expression qui coïncide avec le développement de

$$\frac{Z}{1+Z} = {}_np_{\frac{1}{xyz}}$$

La probabilité pour que une des têtes survive est la somme des probabilités pour que $(x)$ survive et que $(y)$ et $(z)$ meurent — pour que $(y)$ survive et que $(x)$ et $(z)$ meurent — pour que $(z)$ survive et que $(x)$ et $(y)$ meurent.

Cette probabilité est donc :

$$\begin{aligned} &{}_np_x(1 - {}_np_y)(1 - {}_np_z) + {}_np_y(1 - {}_np_x)(1 - {}_np_z) + \\ &+ {}_np_z(1 - {}_np_x)(1 - {}_np_y) = \\ &= {}_np_x + {}_np_y + {}_np_z - \\ &- 2({}_np_{xy} + {}_np_{xz} + {}_np_{yz}) + 3\,{}_np_{xyz} \equiv \frac{Z}{(1+Z)^2} \end{aligned}$$



La probabilité pour que deux têtes ou pour que deux têtes au moins survivent s'obtient d'une façon analogue.

**12.** — Si on tient compte de l'ordre de succession des décès des membres d'un groupe, on est amené, dans le calcul des probabilités correspondantes, à distinguer un très grand nombre de cas, même lorsque le nombre des têtes est assez petit, trois têtes par exemple.

Mais le problème de la détermination des probabilités correspondant à ces divers cas, tout en variant en même temps que les particularités présentées par ces divers cas, est en substance toujours le même et l'hypothèse dont on se sert pour déterminer ce problème est toujours la même ; d'autre part, la connaissance des probabilités correspondant à des groupes de plus de deux ou trois personnes n'a à peu près aucune importance dans la pratique. C'est pourquoi nous nous limiterons dans la suite aux groupes de deux ou trois têtes, sans même examiner toutes les éventualités possibles pour ce dernier cas et en laissant au lecteur le soin d'étendre l'analyse aux cas que nous ne traiterons pas.

Nous admettrons que, si $q$ est la probabilité pour que $r$ têtes meurent au cours de l'année, $\frac{q}{r!}$ exprimera la probabilité pour que ces $r$ têtes meurent dans un ordre déterminé : nous assimilons ainsi le problème de la recherche d'une pareille probabilité au problème, déjà considéré, de la recherche de la probabilité pour que $r$ points, choisis au hasard sur un segment, présentent un ordre de succession déterminé.

Cette assimilation est basée sur l'hypothèse que les décès se distribuent uniformément sur toute la durée de l'année.

Dans le cas de deux têtes, ceci conduit par exemple à admettre que tous les décès des individus d'âge $y$ peuvent être considérés comme se produisant au milieu de l'année et que, tous les décès des individus d'âge $x$ se produisent, une moitié pendant le premier

semestre et l'autre moitié pendant le second semestre : il est alors évident que $\frac{1}{2} q_{xy}$ est la probabilité pour que $(x)$ et $(y)$ meurent dans un intervalle d'un an, mais $(x)$ avant $(y)$ (c'est-à-dire pendant le premier semestre) ou bien $(x)$ après $(y)$ (pendant le second semestre). Le raisonnement peut être étendu immédiatement à plusieurs têtes.

**13.** — Soit ${}_{n-1|}q^{1}_{xy}$ la probabilité pour que $(x)$ meure au cours de la $n^e$ année, à partir du moment où l'on observe $(x)$ et $(y)$, et que $(y)$ soit encore en vie au moment de la mort de $(x)$ : cette probabilité est la somme de la probabilité pour que $(x)$ meure pendant l'année indiquée et que $(y)$ soit en vie à la fin de cette année et de la probabilité pour $(x)$ et $(y)$ meurent tous deux pendant cette même année, mais que $(y)$ meure après $x$. Cette probabilité est donc :

$$(17)\quad \begin{cases} {}_{n-1|}q^{1}_{xy} = ({}_{n-1}p_x - {}_np_x)\,{}_np_y + \\ + \frac{1}{2}({}_{n-1}p_x - {}_np_x)({}_{n-1}p_y - {}_np_y) = \\ = \frac{1}{2}({}_{n-1}p_x - {}_np_x)({}_{n-1}p_x + {}_np_y) \end{cases}$$

De même

$$\sum_{n=1} {}_{n-1|}q^{1}_{xy}$$

sera la probabilité $Q^{1}_{xy}$ pour que $(y)$ survive à $(x)$. Effectuons la somme indiquée en remarquant que l'équation (17) peut s'écrire

$$(17^1)\quad {}_{n-1|}q^{1}_{xy} = \frac{1}{2}\left({}_{n-1}p_{xy} - {}_np_{xy} - \frac{{}_np_{x:y-1}}{p_{y-1}} + \frac{{}_np_{x-1:y}}{p_{x-1}}\right)$$

et que

$$\Sigma\,({}_{n-1}p_{xy} - {}_np_{xy}) = 1$$



Nous obtenons :

$$(18)\quad Q^{1}_{xy} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{e_{x:y-1}}{p_{y-1}} + \frac{e_{x-1:y}}{p_{x-1}}\right)$$

L'expression :

$$\Sigma\,{}_np_{xy} = e_{xy}$$

ou, en général, l'expression :

$$\Sigma\,{}_np_{xy\ldots(r)} = e_{xy\ldots(r)}$$

désigne le nombre moyen d'années qui s'écoule entre l'époque de l'observation et l'époque du premier décès ayant lieu dans le groupe (*vie moyenne du groupe*) [1].

**14.** — On peut démontrer par une méthode entièrement analogue à la précédente — et nous laissons au lecteur le soin de le faire — que la probabilité ${}_{n-1|}q^{1}_{xyz}$ pour que $(x)$ meure au cours de la $n^e$ année et meure avant $(y)$ et $(z)$ et la probabilité $Q^{1}_{xyz}$ pour que $(x)$ meure avant $(y)$ et $(z)$ s'expriment respectivement par les formules :

$$(19)\quad \begin{cases} {}_{n-1|}q^{1}_{xyz} = \frac{1}{3}({}_{n-1}p_{xyz} - {}_np_{xyz}) - \\ - \frac{1}{3}({}_np_x\,{}_{n-1}p_{yz} - {}_{n-1}p_x\,{}_np_{yz}) + \\ + \frac{1}{6}({}_{n-1}p_{xy}\,{}_np_z - {}_np_{xy}\,{}_{n-1}p_z + \\ + {}_{n-1}p_{xz}\,{}_np_{xz}\,{}_{n-1}p_y) \end{cases}$$

[1] Ici encore, comme dans le cas d'un individu isolé, la *complete expectation of life* du groupe s'exprime par :

$$\mathring{e}_{xy\ldots(r)} = \frac{1}{l_x\,l_y\ldots l_{(r)}}\int_0^\infty l_{x+t}\,l_{y+t}\ldots l_{(r)+t}\,dt.$$

et

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} Q^{1}_{xyz} &= \frac{1}{3}\left\{1 - \frac{e_{x:y-1:z-1}}{p_{y-1:z-1}} + \frac{e_{x-1:y:z}}{p_{x-1}}\right\} + \\ &+ \frac{1}{6}\left\{\frac{e_{x-1:y-1:z}}{p_{x-1:y-1}} - \frac{e_{x:y:z-1}}{p_{z-1}} + \frac{e_{x-1:y:z-1}}{p_{x-1:z-1}} - \frac{e_{x:y-1:z}}{p_{y-1}}\right\} \end{aligned}\right.$$

Soit $Q^{2}_{\underset{1}{xyz}}$ la probabilité pour que $(z)$ survive à $(x)$ et à $(y)$ et que $(x)$ survive à (y) : c'est évidemment la différence entre la probabilité pour que $(x)$ meure avant $(z)$ et la probabilité pour que $(x)$ meure avant $(y)$ et $(z)$. On a donc :

$$(21)\qquad Q^{2}_{\underset{1}{xyz}} = Q^{1}_{xz} - Q^{1}_{xyz}.$$

Les relations suivantes entre la probabilité pour que $(x)$ meure en second ou en troisième lieu et les probabilités précédemment définies sont aussi évidentes :

$$(22)\qquad Q^{2}_{xyz} = Q^{2}_{\underset{1}{xyz}} + Q^{2}_{\underset{1}{xyz}} = Q^{1}_{xy} + Q^{1}_{xz} - 2Q^{1}_{xyz}$$

$$(23)\qquad Q^{3}_{xyz} = 1 - Q^{1}_{xyz} - Q^{2}_{xyz} = 1 - Q^{1}_{xy} - Q^{1}_{xz} + Q^{1}_{xyz}.$$

On voit aussi immédiatement quel est le sens des notations $Q^{1}_{x:\overline{yz}}$ et $Q^{1}_{\overline{xy}:z}$ qu'on peut définir par les égalités :

$$(24)\qquad Q^{1}_{x:\overline{yz}} = Q^{1}_{xyz} + Q^{2}_{xyz}$$

$$(25)\qquad Q^{1}_{\overline{xy}:z} = Q^{2}_{\underset{1}{xyz}} + Q^{2}_{\underset{1}{xyz}}.$$

### III. — Tables de commutation.

**15.** — Reprenons l'expression :

$$S_1 v p_1 + S_2 v^2 p_2 + \ldots + S_n v^n p_n.$$

Dans le cas où l'on a $S_1 = S_2 = \ldots = S_n$ ou dans le cas où les



quantités S sont liées par une relation simple (par exemple si elles varient linéairement, seul cas qui se présente dans la pratique), le calcul de la valeur de cette expression peut être effectué rapidement, en se servant de nombres spéciaux dits constantes de *commutation* et de tables contenant ces constantes.

Parmi ces constantes la plus importante est le produit du nombre des vivants à l'âge $x$ par le facteur d'escompte $v^x$, autrement dit le nombre des vivants rapporté au moment de la naissance des $l_x$.

Cette constante introduite par Tetens (*Einleitung zur Berechnung der Leibrenten*, Leipzig 1785-86), se désigne par $D_x$. On pose donc :

$$\text{I}\qquad D_x = v^x l_x.$$

Les autres constantes de commutation se déduisent de celle-ci ou peuvent s'y ramener. Leur définition n'est pas tout à fait la même chez les différents auteurs.

Nous poserons, avec les actuaires anglais ($\omega$ désignant l'âge extrême de la table) :

$$\text{II}\qquad \sum\nolimits_{x+1}^{\omega} D_x = \sum\nolimits_{x+1} D_x = N_x$$

$$\text{III}\qquad \sum\sum\nolimits_{x+1} D_x = \sum\nolimits_{x} N_x = S_x$$

$$\text{IV}\qquad v\,D_x - D_{x+1} = v^{x+1} d_x = C_x$$

$$\text{V}\qquad \sum\nolimits_{x} C_x = M_x$$

$$\text{VI}\qquad \sum\sum\nolimits_{x} C_x = \sum\nolimits_{x} M_x = R_x$$

Les auteurs français et américains posent :

$$\text{II}^1\qquad N_x = \Sigma_x D_x$$

et par suite

$$\text{III}^1\qquad S_x = \Sigma\Sigma_x D_x.$$

Cette définition présente l'avantage de concorder mieux avec la définition des autres constantes, avantage dont il ne faut pas d'ailleurs exagérer la portée assez faible.

On pose aussi quelquefois [1] :

IV[1] $$C_x = d_x\, v^{x+\frac{1}{2}}$$

et par suite

V[1] $$v^{-\frac{1}{2}} \sum_x d_x\, v^{x+1} = M_x$$

VI[1] $$v^{-\frac{1}{2}} \sum\sum_x d_x\, v^{x+1} = R_x$$

où l'on doit remplacer

$$v^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{1+i}$$

par une valeur approchée.

On évite toute confusion entre ces nouvelles quantités et les précédentes en adoptant des symboles qui, tout en rappelant les précédents, en diffèrent cependant.

Tels sont les symboles $\overline{N}_x$, $\overline{C}_x$, $\overline{M}_x$, $\overline{R}_x$, qui remplacent $N_x$, $C_x$, $M_x$, $R_x$ et qu'on a proposés au second congrès international des actuaires (Bruxelles, 1898).

**16.** — On a :

$$\log D_x = \log l_x + x \log v.$$

Dans la construction d'une table de nombres N en partant des logarithmes des nombres D, on peut se servir utilement des tables de logarithmes de Gauss qui donnent la valeur de $\log(1+x)$

(1) Voir par exemple Poterin du Motel. — *Loc. cit.*, p. 218.



pour les différentes valeurs de $\log x$, pris comme argument [1]. On part de l'âge extrême $\omega$ de la table de survie et on calcule successivement :

$$\log(D_\omega + D_{\omega-1}), \quad \log D_\omega + D_{\omega-1} + D_{\omega-2}).$$

On a en effet :

$$N_\omega = 0, \quad N_{\omega-1} = D_\omega, \quad N_{\omega-2} = D_{\omega-1} + N_{\omega-1} = D_{\omega-1} + D_\omega + \ldots$$

Une remarque analogue s'applique à la construction des tables de certaines autres constantes de commutation.

**17.** — Pratiquement on ne construit pas des tables de commutation pour des groupes de plus de deux têtes, car ces tables devraient avoir une très grande extension, tout en étant d'un usage très restreint.

Il résulte de raisonnements faits précédemment que les probabilités correspondant aux divers états possibles d'un groupe peuvent toujours se ramener à une somme de probabilités correspondant à la conservation totale du groupe : il serait donc aussi très important de définir une constante tout à fait analogue à la quantité $D_x$ considérée plus haut et qui exprime la valeur escomptée à un certain moment du produit

$$l_{x_1}\, l_{x_2} \ldots l_{x_m}.$$

(1) On a :

$$\log(a+b) = \log a + \log\left(1 + \frac{b}{a}\right)$$

$\log a$ est connu, $\log\left(1+\frac{b}{a}\right)$ se lit immédiatement dans la table des logarithmes de Gauss en face de l'argument $\log \frac{b}{a} = \log b - \log a$.

On a de même :

$$\log(a-b) = \log b + \log\left(\frac{a}{b} - 1\right).$$

On peut poser, soit

$$D_{x_1 x_2 \dots x_m} = v^{x_1} l_{x_1} l_{x_2} \dots l_{x_m} \text{ (1)}$$

soit

$$D_{x_1 x_2 \dots x_m} = v^{\frac{x_1 + x_2 \dots x_m}{m}} l_{x_1} l_{x_2} \dots l_{x_m}.$$

La deuxième définition présente l'avantage de n'être pas dissymétrique comme la première et de vérifier l'égalité :

$$D_{x_1+n,\, x_2+n,\, \dots\, x_m+n} = v^{\frac{x_1+x_2\dots+x_m}{m}+n} l_{x_1+n} l_{x_2+n} \dots l_{x_m+n}$$

Pour un groupe de deux têtes, on a (notation de De Morgan)

VII $$D_{xy} = v^{\frac{x+y}{2}} l_x l_y.$$

Posons de même, par analogie avec des notations employées précédemment :

VIII $$\sum_{(x+1,\, y+1)} D_{xy} = N_{xy}$$

IX $$v D_{xy} - D_{x+1,\, y+1} v^{\frac{x+y}{2}+1} (l_x l_y - l_{x+1} l_{y+1}) = C_{xy}$$

X $$\sum_{(x,\, y)} C_{xy} = M_{xy}.$$

Les probabilités pour lesquelles on tient compte de l'ordre de succession des décès (conformément à ce qu'on a vu au n° **13**)

(1) Dans ce cas, il convient de choisir comme exposant de $v$ le plus grand des âges afin que D soit le plus petit possible. Pour deux âges déjà les quantités D sont assez grandes.

On a par exemple (table $H^M$)

$$v = 1{,}035^{-1}$$
$$v^{25} l_{20} l_{30} = 3645.508.975$$
$$v^{30} l_{20} l_{30} = 3609.420.726$$

Pour cette table $H^M$ on a $l_0 = 127.283$.

Si on prenait $l_0 = 1273$, on aurait pour les quantités précédentes

364760
307118

avec une approximation suffisante dans la pratique



conduisent au contraire aux notations suivantes :

XI $$v^{\frac{x+y}{2}} d_x l_{y+\frac{1}{2}} = C^1_{xy}$$

XII $$\sum_{(x,\, y)} C^1_{xy} = M^1_{xy}$$

## IV. — Application des lois de Gompertz et de Makeham. Règle de Simpson.

**18.** — En supposant exacte la loi de Gompertz il est possible, comme nous l'avons vu (chap. 1, 2e partie, § 12) de remplacer un groupe de $r$ têtes $(x)$, $(y)$, $(z)$ ... par une tête unique dont l'âge $\xi_1$ est défini par l'équation

(a) $$c^{\xi_1} = c^x + c^y + c^z + \dots$$

($c$ étant une constante); et en supposant exacte la loi de Makeham on peut de même remplacer un groupe de $r$ têtes $(x)$, $(y)$, $(z)$ ... par un autre groupe de $r$ têtes ayant toutes un même âge $\xi_2$ défini par l'équation :

(b) $$rc^{\xi_2} = c^x + c^y + c^z + \dots$$

($c$ étant encore une constante, mais différente de la précédente) : la probabilité ${}_nP_{xyz}$ de survie après une période de temps arbitraire $n$ n'est pas altérée par les changements précédents.

C'est précisément de cette propriété que découle la grande importance des deux lois précédentes : elles permettent de remplacer les tables qui correspondraient aux diverses combinaisons des âges $r$ à $r$ par des tables correspondant à un âge unique. Par exemple, en ce qui concerne les tables de commutation, il suffira pour résoudre les divers problèmes relatifs aux assurances de groupes d'avoir les tables habituelles donnant $N_x$, $D_x$ ... s'il s'agit de la loi de Gompertz ou des tables donnant $D_{xx \dots x}$, $N_{xx \dots x}$ s'il s'agit de la loi de Makeham : en effet il est toujours possible de

ramener le calcul au calcul de sommes de la forme

$$\Sigma\, v^n {}_n p_{xyz} \cdots {}_{(r)}$$

dans lesquelles on peut effectuer les substitutions définies par les équations ($a$) et ($b$).

**19.** — En l'absence d'une table des puissances de $c$, le calcul effectif des actuariens $\xi_1$ et $\xi_2$ peut se faire dans la pratique soit au moyen des coefficients instantanés de mortalité $\mu_x$, soit dans le cas où l'équation ($a$) s'applique au moyen des probabilités de survie $P_x$ elles-mêmes.

On a en effet, dans le cas de l'équation ($a$) :

$$\mu_{\xi_1} = Bc^{\xi_1}\,;\; p_x = kg^{c^x}$$

et, à cause de l'équation ($a$) elle-même :

$$\mu_{\xi_1} = Bc^{(x+y+z\ldots)} = \mu_x + \mu_y + \mu_z + \ldots \tag{26}$$

$$\left\{\begin{aligned} \log p_{\xi_1} &= c^{\xi_1}(c-1)\log g = \left\{ c^x + c^y \ldots \right\}(c-1)\log g = \\ &= \log p_x + \log p_y + \ldots \end{aligned}\right. \tag{27}$$

d'où

$$p_{\xi_1} = p_x\, p_y\, p_z \cdots \tag{28}$$

Dans le cas où la loi considérée est la loi de Makeham, on a de même

$$\mu_x = A + Bc^x$$

et, à cause de l'équation ($b$) :

$$\left\{\begin{aligned} r\mu_{\xi_2} &= rA + Brc^{\xi_2} = rA + B\,(c^x + c^y + c^z \ldots) = \\ &= \mu_x + \mu_y + \mu_z + \ldots \end{aligned}\right. \tag{29}$$

Limitons-nous à un seul exemple.

Soit $x = 28$, $y = 35$, $z = 46$.



On a, d'après la table $H^M$ :

$$\begin{aligned} \mu_{28} &= .\,00742 \\ \mu_{35} &= .\,00854 \\ \mu_{46} &= .\,01260 \\ 3\,\mu_{\xi_2} &= .\,02856 \end{aligned}$$

d'où

$$\mu_{\xi_2} = .\,00952$$

En parcourant la table des valeurs de $\mu_x$ nous trouvons :

$$\begin{aligned} \mu_{38} &= .\,00928 \\ \mu_{39} &= .\,00957 \end{aligned}$$

d'où nous déduisons :

$$38 < \xi_2 < 39$$

$${}_n p_{38:38:38} < {}_n p_{28:35:46} < {}_n p_{39:39:39}$$

Dans la pratique pour déterminer la valeur $A_0$ d'une assurance. on interpole linéairement entre les deux valeurs $A_1$ $A_2$ qu'aurait l'assurance si $x\,y\,z$ avaient les valeurs (38, 38, 38) et (39, 39, 39) c'est-à-dire que l'on pose :

$$A_0 = A_1 + \frac{\mu_{\xi_2} - \mu_{38}}{\mu_{39} - \mu_{38}}(A_2 - A_1)$$

La table $H^M$ étant ajustée suivant la loi de Makeham, l'équation (26) a lieu rigoureusement pour cette table. Il n'en est pas de même de l'équation (26) : la table $H^M$ donne :

$$\begin{aligned} \mu_{59} &= .\,02719 \\ \mu_{60} &= .\,02920 \end{aligned}$$

et on aurait obtenu en se servant de cette équation (26)

$${}_n p_{59} > {}_n p_{28:35:46} > {}_n p_{60}.$$

**20.** — Les méthodes précédentes ramènent les probabilités de survie relatives à un groupe d'individus d'âges différents à la pro-

babilité de survie d'un unique individu ou d'un groupe d'individus du même âge : les remarques que nous venons de faire et le théorème de M. Quiquet montrent que cette marche est d'autant plus rigoureuse que les fonctions de Gompertz et de Makeham se prêtent plus exactement à la représentation de la courbe des vivants pour les âges auxquels se rapportent les probabilités.

Par exemple, le coefficient instantané de mortalité n'est une fonction croissante de l'âge qu'à partir d'un certain âge (voisin de 17 ans) et comme le coefficient instantané de mortalité défini par les deux lois précédentes est une fonction croissante de $x$, quel que soit $x$, on peut exclure *à priori* la possibilité d'appliquer correctement les méthodes précédentes à des groupes contenant des individus très jeunes. En général il n'y a pas un accord tout à fait satisfaisant entre les fonctions réelles de survie et la loi de Gompertz : dans la pratique, on ne peut admettre cette loi que pour des groupes formés d'individus dont les âges diffèrent peu et pour des probabilités de survie relatives à des périodes assez courtes.

La fonction de Makeham se prête au contraire beaucoup mieux à représenter le nombre des vivants, mêmes avec des tables qui n'auraient pas été ajustées conformément à cette loi.

Il en résulte que, même avec de pareilles tables, il est légitime au point de vue pratique de se servir de l'équation (*b*), bien que l'emploi de cette équation ne se justifie pas rigoureusement au point de vue théorique. L'équation (29) ne subsistant plus dans ce cas, on peut déterminer la constante $c$ d'une façon suffisamment approchée en se servant de l'équation :

$$c^m = \frac{\log p_{x+m} - \log p_{x+2m}}{\log p - \log p_{x+m}}$$

à condition de choisir pour $x$ un âge peu élevé (sans choisir cependant les âges les plus bas) et pour $x + 2m$ un des âges extrêmes. Avec les tables de mortalité les plus souvent employées on trouve pour $\log c$ une valeur très voisine de 0,04.



**21.** — Il résulte des considérations précédentes que la règle dite *règle de Simpson* d'après laquelle on peut remplacer si $x < y < z$,

$$\Sigma v^n \, {}_np_{xyz}$$

par

$$\Sigma v^n \, {}_np_{xw}$$

(où l'on pose $\Sigma v^n \, {}_np_w = \Sigma v^n {}_np_{xy}$) n'est rigoureusement applicable que dans les cas où la loi de Gompertz est valable.

On peut démontrer que, s'il n'en est pas ainsi, on a pour tous les âges, sauf pour les âges extrêmes

$$\Sigma v^n \, {}_np_{xw} > \Sigma v^n \, {}_np_{xyz} \text{ (1)}$$

(1) Pour la règle de Simpson et pour les modifications proposées par Milne, etc..., voir *Text-Book* Ch. XII.

# CHAPITRE II

—

## DETERMINATION DE LA VALEUR DES PRINCIPALES FORMES D'ASSURANCES SUR LA VIE

### I. Capitaux différés

**1.** — Nous représenterons par ${}_nE_x$ la valeur de l'assurance d'un capital égal à l'unité payable dans $n$ années pourvu que $(x)$ survive à cette époque. Dans la relation évidente,

$$ {}_nE_x = v^n \, {}_np_x $$

remplaçons ${}_np_x$ par sa valeur en fonction de $l_x$

$$ {}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}, $$

multiplions le numérateur et le dénominateur par $v^x$ et posons $v^x l_x = D_x$. Nous obtenons :

$$ (1) \qquad {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}. $$

Remarquons que l'on a :

$$ {}_{n+n'}E_x = \frac{D_{x+n+n'}}{D_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x} \frac{D_{x+n+n'}}{D_{x+n}} = {}_nE_x \, {}_{n'}E_{x+n} $$

relation tout à fait semblable à celle qui existe entre les probabilités pour que $(x)$ soit en vie entre les deux âges $n$ et $n + n'$. Le capital différé coïncide en effet avec la probabilité de survie d'une génération qui aurait une loi de survie d'après laquelle le nombre des vivants à l'âge $x$ serait $D_x$.



**2.** — Des relations tout à fait analogues à (1) expriment la valeur des capitaux différés sur plusieurs têtes.

Soit ${}_nE_{xy}\ldots$ la valeur d'un capital égal à l'unité différé de $n$ ans et payable pourvu que aucun des assurés ne meure avant l'échéance. On a :

$$ (2) \qquad {}_nE_{xy}\ldots = v^n \, {}_np_x \, {}_np_y \ldots = v^n \frac{l_{x+n}}{l_x} \frac{l_{y+n}}{l_y} \ldots = \frac{D_{x+n \; y+n \ldots}}{D_{xy\ldots}} $$

### II. Rentes viagères

**3.** — La valeur d'une rente viagère sur la tête de $(x)$ s'obtient en faisant la somme des valeurs prises par ${}_nE_x$ lorsqu'on donne à $n$ les valeurs entières de l'intervalle $(1, \omega - x)$ : par rente viagère on entend une annuité dont le premier terme est payable dans un an pourvu que $(x)$ soit en vie à cette époque et dont les termes suivants sont payables d'année en année tant que $(x)$ est en vie. Désignons par $a_x$ la valeur de cette annuité. On a, avec la notation II du § 3 :

$$ (3) \qquad a_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} \ldots}{D_x} = \frac{N_x}{D_x}. $$

De même, la valeur $a_{xy}$ d'une rente qui devra être payée à la fin de la première année, de la deuxième année, etc..., jusqu'au décès de l'un des membres du groupe $(x, y)$ sera d'après la notation VIII

$$ (4) \qquad a_{xy} = \frac{D_{x+1:y+1} + D_{x+2:y+2} + \ldots}{D_{xy}} = \frac{N_{xy}}{D_{xy}}. $$

**4.** — Les relations suivantes déduites de (3) et de (4) :

$$ (5) \qquad a_x = \frac{N_x}{D_x} = \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+1}}{D_x} \frac{N_{x+1}}{D_{x+1}} = vp_x(1 + a_{x+1}) $$

$$ (6) \qquad \left\{ \begin{aligned} a_{xy}\ldots = \frac{N_{xy\ldots}}{D_{xy\ldots}} &= \frac{D_{x+1:y+1\ldots}}{D_{xy\ldots}} + \frac{D_{x+1:y+1\ldots}}{D_{xy\ldots}} \frac{N_{x+1:y+1\ldots}}{D_{x+1:y+1\ldots}} = \\ &= vp_{xy}(1 + a_{x+1:y+1\ldots}) \end{aligned} \right. $$

permettent de former une table des valeurs de :

$$a_x,\ a_{xy} \ldots$$

en partant de l'âge extrême $\omega$, si l'on a une table de valeurs de $v$, $v^2$ ... et de $p$. L'équation (5) donne en effet, en partant de $a_\omega = 0$ :

$$\begin{aligned} a_{\omega-1} &= vp_{\omega-1},\ a_{\omega-2} = vp_{\omega-2}(1 + vp_{\omega-1}) = \\ &= vp_{\omega-2} + v^2 p_{\omega-1} \ldots \\ a_{\omega-n} &= vp_{\omega-n} + v^2 p_{\omega-n}\, p_{\omega-n+1} + \\ &+ v^3 p_{\omega+n} p_{\omega-n+1} p_{\omega-n+2} + \ldots \end{aligned}$$

ou, si l'on pose :

$$\omega - n = x$$

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} a_x &= vp_x + v^2 p_x p_{x+1} + v^3 p_x p_{x+1}\, p_{x+2} + \ldots \\ &= vp_x + v^2{}_2p_x + v^3{}_3p_x + \ldots \end{aligned} \right.$$

relation que nous aurions pu déduire de la définition même de la rente viagère.

Si l'on suppose $x > y$, $x + n' = \omega$, l'équation (6) donne de même :

$$a_{\omega, y+n'} = 0,\ a_{\omega-1 : y+n'-1} = vp_{\omega-1 : y+n'-1} \ldots$$

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} a_{xy} \ldots &= vp_{xy} + v^2 p_{xy} p_{x+1 : y+1} = \\ &= vp_{xy} + v^2{}_2p_{xy} + \ldots \end{aligned} \right.$$

relation tout à fait analogue à la relation (7), de même que la relation (7) était analogue à (3) : pour les annuités relatives à des groupes s'éteignant au premier décès, on a en effet les mêmes relations que pour les annuités relatives à des personnes isolées.

**5.** — Nous représenterons

par $|_m a_x = a_{x\overline{m}|}$ la valeur d'une annuité temporaire de $m$ années sur la tête $(x)$ ;

par $_{m|n-m}a_x$ la valeur d'une annuité différée de $m$ années et temporaire de $n - m$ années sur la tête $(x)$, c'est-à-dire d'une annuité



dont le premier terme est payable à la fin de la $(m + 1)^{\text{ème}}$ année et le dernier terme à la fin de la $n^{\text{ème}}$ année à partir de l'instant où l'assuré $(x)$ a l'âge $x$ ;

par $_{n|}a_x$ la valeur d'une annuité différée de $n$ années sur la tête $(x)$.

On a évidemment :

$$(9) \qquad |_m a_x = \frac{\sum_{m=1}^{m=m} D_{x+m}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+m}}{D_x}$$

$$(10) \qquad {}_{m|n-m}a_x = \frac{\sum_{m=m+1}^{m=n} D_{x+m}}{D_x} = \frac{N_{x+m} - N_{x+n}}{D_x}$$

$$(11) \qquad {}_{n|}a_x = \frac{\sum^{m=n+1} D_{x+m}}{D_x} = \frac{N_{x+n}}{D_x}$$

et

$$(12) \qquad \begin{aligned} &|_m a_x + {}_{m|n-m}a_x + {}_{n|}a_x = |_m a_x + \\ &+ {}_mE_x|_{n-m}a_{x+m} + {}_nE_x a_{x+n} = a_x \end{aligned}$$

ou, si $m = n$,

$$(13) \qquad a_x = |_n a_x + {}_{n|}a_x = |_n a_x + {}_nE_x a_{x+n}$$

On peut étendre immédiatement les formules (9) à (13) à des groupes.

**6.** — Représentons par $(va)_{x\overline{n}|}$ la valeur d'une rente temporaire de $n$ années dont le montant initial $\alpha$ croît (ou décroît) annuellement de $\beta$ pour atteindre à la fin de la $n^{\text{ème}}$ année la valeur $\alpha \pm (n - 1)\beta$. On peut évidemment concevoir $(va)_{x\overline{n}|}$ comme résultant de la somme

$$\alpha|_n a_x \pm \beta_1|_{n-1}a_x \pm \beta_2|_{n-2}a_x \pm \ldots \pm \beta_{n-1}|_1 a_x$$

En remplaçant ${}_{r|n-r}a_x$ et ${}_{|n}a_x$ par les expressions établies précédemment et en posant (III, § 3)

$$\Sigma N_x = S_x$$

nous obtenons

$$(14)\quad \begin{cases} \frac{1}{D_x}\left[\alpha(N_x - N_{x+n}) \pm \beta\left\{N_{x+1} + N_{x+2} + \dots \right.\right. \\ \qquad \left.\left. + N_{x+n} - nN_{x+n}\right\}\right] = \\ = \dfrac{\alpha(N_x - N_{x+n}) \pm \beta(S_{x+1} - S_{x+n+1} - nN_{x+n})}{D_x} = \\ = (va)_{x\overline{n}|} \end{cases}$$

Cette expression devient, si l'on a $\alpha = \beta = 1$ :

$$(14^1)\qquad \frac{S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}}{D_x}$$

ou bien

$$(14^2)\qquad \frac{N_x + (n-1)N_{x+n} - (S_{x+1} - S_{x+n+1})}{D_x}$$

suivant que le montant de la rente va en croissant ou en décroissant.

La valeur $(14^1)$ d'une annuité temporaire de $n$ années croissant de 1 chaque année depuis 1 jusqu'à $n$ se désigne par $(Ia)_{x\overline{n}|}$ (1).

Si on choisit $n \geqslant \omega - x$, l'expression (14) devient

$$(15)\qquad \frac{\alpha N_x \pm \beta S_{x+1}}{D_x} = (va)_x$$

et dans le cas où $\alpha = \beta = 1$ et où l'annuité est croissante

$$(16)\qquad \frac{S_x}{D_x} = (Ia)_x$$

La valeur $(I_{\overline{n}|}a)_x$ d'une annuité qui va d'abord en croissant de 1,

(1) I initiale de *increasing* = croissant, $v$ initiale de variable.



chaque année depuis 1 jusqu'à $n$ et qui demeure ensuite constante pendant le reste de la vie est évidemment :

$$(17)\qquad (Ia)_{x\overline{n}|} + {}_{n+1|}a_x = \frac{S_x - S_{x+n}}{D_x}$$

**7.** — Soit $\mathbf{a}_x$ la valeur d'une annuité viagère égale à l'unité et dont le premier terme doit être payé immédiatement (*annuité anticipée* à l'opposée de $a_x$ = *annuité échue*)

$$(18)\quad \mathbf{a}_x = \frac{D_x + D_{x+1} + \dots}{D_x} = \frac{N_{x-1}}{D_x} = 1 + \frac{N_x}{D_x} = 1 + a_x$$

En remplaçant dans les diverses notations précédentes $a$ par $\mathbf{a}$, nous aurons des symboles représentant les mêmes annuités, mais anticipées de un an. Nous aurons par ex.

$$(19)\qquad {}_{|n}\mathbf{a}_x = \frac{N_{x-1} - N_{x+n-1}}{D_x}$$

$$(20)\qquad {}_{n|}\mathbf{a}_x = \frac{N_{x+n-1}}{D_x}$$

et ainsi de suite.

Il nous paraît inutile d'indiquer explicitement la façon d'étendre toutes les formules précédentes au cas de groupes s'éteignant au premier décès.

**8.** — La valeur d'une annuité anticipée de un an est $a_x + 1$. Nous pouvons admettre, dans une première approximation, que $a_x + \frac{s}{m}(s \leqslant m)$ est la valeur d'une annuité anticipée de $\frac{s}{m}$. En donnant à $s$ les valeurs $m - 1$, $m - 2$, ... 1, 0, en faisant la somme et en la multipliant par $\frac{1}{m}$, nous obtiendrons la valeur $a_x^{(m)}$ d'une annuité payable à la fin de chaque fraction $\frac{1}{m}$ d'année et par fractions de montant $\frac{1}{m}$ chacune.

On a :

$$(21)\quad \begin{cases} a_x^{(m)} = \frac{1}{m}\left\{ a_x + a_x + \frac{1}{m} + \dots a_x + \frac{m-1}{m} \right\} = \\ \qquad = a_x + \frac{m-1}{2m} \end{cases}$$

De même

$$(22)\quad \begin{cases} \mathrm{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m}\left\{ a_x + \frac{m}{m} + a_x + \frac{m-1}{m} + \dots a_x + \frac{1}{m} \right. = \\ \qquad = a_x + \frac{m+1}{2m} = \mathrm{a}_x - \frac{m-1}{2m} \end{cases}$$

est la valeur d'une annuité payable par fractions de $\frac{1}{m}$ au début de chaque période égale à $\frac{1}{m}$ d'année.

Lorsque $\frac{1}{m}$ tend vers zéro, l'annuité viagère payable à la fin de chaque période $\frac{1}{m}$ a pour limite :

$$(23)\quad \begin{cases} \bar{\mathrm{a}}_x = \bar{a}_x = \lim\limits_{m=\infty} \mathrm{a}_x^{(m)} = \lim\limits_{m=\infty} a_x^{(m)} = \\ = \lim\limits_{m=\infty} \left( a_x + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2m} \right) = a_x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

(*annuité continue*).

**9.** — La relation (13)

$$|_n a_x = a_x - {}_n\mathrm{E}_x a_{x+n}$$

montre que la valeur d'une rente temporaire fractionnée par périodes de $\frac{1}{m}$ est de même :

$$(24)\quad \begin{cases} |_n a_x^{(m)} = a_x + \frac{m-1}{2m} - {}_n\mathrm{E}_x \left( a_{x+n} + \frac{m-1}{2m} \right) = \\ \qquad = |_n a_x + \frac{m-1}{2m}(1 - {}_n\mathrm{E}_x) \end{cases}$$



La relation précédente et la relation :

$$_n|a_x = a_x - |_n a_x$$

fournissent de même immédiatement la valeur d'une annuité fractionnée, différée de $n$ années :

$$(25)\qquad {}_n|a_x^{(m)} = {}_n|a^x + \frac{m-1}{2m}\,{}_n\mathrm{E}_x$$

**10.** — Il est évident que les formules (21) à (25) s'appliquent aussi au cas des groupes, bien que dans ce cas l'approximation soit moins bonne. Ces formules ont été déduites de l'hypothèse exprimée par la relation :

$$(a)\qquad \mathrm{D}_{x+\frac{s}{m}} = \mathrm{D}_x - \frac{s}{m}(\mathrm{D}_x - \mathrm{D}_{x+1})$$

Autrement dit elles supposent que les quantités D forment une progression arithmétique.

On obtient des expressions différentes, et qu'on ne peut pas appliquer au cas des groupes sans faire certains changements, en partant au contraire de l'hypothèse de De Moivre qui consiste à supposer qu'il y a une relation de la forme (*a*) entre le nombre $l_{x+\frac{s}{m}}$ des vivants à l'âge $x + \frac{s}{m}$ et les nombres $l_x$ et $l_{x+1}$.

La valeur actuelle du payement de montant $\frac{1}{m}$ effectué au bout du temps $\frac{mn+s}{m}$ est :

$$\frac{1}{m}\frac{1}{l_x} v^{n+\frac{s}{m}} \left\{ l_{x+n} + \frac{s}{m}(l_{x+n+1} - l_{x+n}) \right\}$$

ou bien, en posant $v^{\frac{1}{m}} = q$ :

$$\frac{1}{m}\left[ \frac{m-s}{m}\mathrm{D}_{x+n} q^s + \frac{s}{m}\mathrm{D}_{x+n+1} q^{-m+s} \right].$$

En donnant successivement à $n$ les valeurs 0, 1, 2 ... et en fai-

sant la somme des quantités ainsi obtenues, on obtient

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} a_x^{(m)} &= \frac{1}{m}\left[(1+a_x)\sum_{s=1}^{m}\frac{m-s}{m}q^s + a_x\sum_{s=1}^{m}\frac{s}{m}q^{-m+s}\right] = \\ &= \frac{a_x}{m}\left\{\sum_{s=1}^{m}q^s - \frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m}sq^s + \frac{1}{m}(1+i)\sum_{s=1}^{m}sq^s\right\} + \\ &\quad + \frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m}q^s - \frac{1}{m^2}\sum_{s=1}^{m}sq^s = \\ &= \frac{a_x}{m}\left\{\sum_{s=1}^{m}q^s + \frac{1}{m}i\sum_{s=1}^{m}sq^s\right\} + \frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m}q^s - \frac{1}{m^2}\sum_{s=1}^{m}sq^s \end{aligned}\right.$$

Servons-nous des relations suivantes (1re partie, chap. III) formules 7-20-26)

$$\frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m}q^s = \frac{1}{m}\sum v^{\frac{s}{m}} = \frac{iv}{j_{(m)}}$$

$$\frac{1}{m^2}\sum_{s=1}^{m}sq^s = \frac{1}{m^2}\sum_{s=1}^{m}sv^{\frac{s}{m}} = \frac{i}{(1+i)^{1-\frac{1}{m}}j_m^2} - \frac{v}{j_{(m)}}$$

En portant ces valeurs dans l'équation 26, nous obtenons après des simplifications faciles ;

$$(27)\qquad a_x^{(m)} = \frac{1}{j_{(m)}} - \frac{i}{(1+i)^{1-\frac{1}{m}}j_m^2}(1-ia_x)$$

Supposons, que $m$ croisse indéfiniment. On a (1re partie, chap. III, formule (10)) :

$$\lim_{m=\infty} j_{(m)} = \delta = \log(1+i)$$

$$(28)\quad \lim_{m=\infty} a_x^{(m)} = \bar{a}_x = \frac{1}{\delta} - \frac{i(1-ia_x)}{(1+i)\delta^2} = \frac{i^2a_x + \delta(1+i) - i}{(1+i)\delta^2}$$

**11.** — Passons au cas de deux têtes et admettons toujours l'hypothèse de De Moivre :

$$l_{x+n+\frac{s}{m}} = l_{x+n} + \frac{s}{m}(l_{x+n+1} - l_{x+n})$$

$$l_{y+n+\frac{s}{m}} = l_{y+n} + \frac{s}{m}(l_{y+n+1} - l_{y+n})$$



La valeur actuelle (au début de l'opération) du versement $\frac{1}{m}$ effectué au bout du temps $\frac{mn+s}{m}$ est :

$$\frac{1}{m}\frac{1}{(1+i)^{n+\frac{s}{m}}}\left(\frac{m-s}{m}l_{x+n} + \frac{s}{m}l_{x+n+1}\right)\left(\frac{m-s}{m}l_{y+n} + \right.$$
$$\left. + \frac{s}{m}l_{y+n+1}\right)\frac{1}{l_xl_y} =$$
$$= \frac{1}{m^3}\frac{1}{(1+i)^{n+\frac{s}{m}}}\left\{(m-s)^2l_{x+n}l_{y+n} + s(m-s)l_{x+n}l_{y+n+1} + \right.$$
$$\left. + s(m-s)l_{x+n+1}l_y + s^2l_{x+n+1}l_{y+n+1}\right\}\frac{1}{l_xl_y}$$

En donnant à $n$ les valeurs 0, 1, 2 ... et en faisant la somme nous obtenons

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{m^3}v^{\frac{s}{m}}\left\{(m-s)^2\mathbf{a}_{xy} + s(m-s)\mathbf{a}_{x,y+1}\frac{l_{y+1}}{l_y} + \right. \\ &\left. + s(m-s)\mathbf{a}_{x+1,y}\frac{l_{x+1}}{l_x} + s^2(1+i)(\mathbf{a}_{xy}-1)\right\} \end{aligned}\right.$$

comme valeur d'une rente périodique de montant $\frac{1}{m}$ à servir au groupe $(x, y)$ chaque année à la fin de la période $\frac{s}{m}$. Il en résulte évidemment :

$$(29')\quad \left\{\begin{aligned} a_{xy}^{(m)} &= \frac{1}{m^3}\left\{\mathbf{a}_{xy}\sum_{s=1}^{m}(m-s)^2v^{\frac{s}{m}} + \right. \\ &+ \frac{l_{y+1}}{l_y}\mathbf{a}_{x,y+1}\sum s(m-s)v^{\frac{s}{m}} + \\ &\left. + \frac{l_{x+1}}{l_x}\mathbf{a}_{x+1:y}\sum_{s=1}^{m}s(m-s)v^{\frac{s}{m}} + (1+i)a_{xy}\sum s^2v^{\frac{s}{m}}\right\} \end{aligned}\right.$$

Or on a :

$$(30)\qquad \frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m}v^{\frac{s}{m}} = \frac{iv}{j_{(m)}}$$

$$(31)\qquad \frac{1}{m^2}\sum_{s=1}^{m}sv^{\frac{s}{m}} = \frac{i - j_{(m)}(1+i)^{+\frac{1}{m}}}{(1+i)^{1-\frac{1}{m}}j_{(m)}^2}$$

$$
(32)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{m^3}\sum_{s=1}^{m} s^2 v^{\frac{s}{m}} = \frac{1}{m^3}\left\{ q + 4q^2 + 9q^3 + 16q^4 \ldots + \right.\\
&\qquad \left. + \ldots m^2 q^m \right\} = \\
&= \frac{1}{m^3(1-q)}\left[q + 2^2q^2 + 3^2q^3 + \ldots m^2q^m - q^2 - \right.\\
&\qquad \left. - 2^2q^3 - \ldots m^2q^{m+1}\right] = \\
&= \frac{1}{m^3(1-q)}\left[2(q + 2q^2 + \ldots mq^m) - \right.\\
&\qquad \left. - (q + q^2 + \ldots q^m) - m^2q^{m+1}\right] = \\
&= \frac{1}{m^3(1 - v^{\frac{1}{m}})}\left[2\sum_{s=1}^{m} s v^{\frac{s}{m}} - \sum v^{\frac{s}{m}} - m^2 v \,.\, v^{\frac{1}{m}}\right] = \\
&= \frac{2i - j_{(m)}(1+i)^{\frac{1}{m}}\left\{2(1+i)^{\frac{2}{m}} - i\right\} - j_{(m)}^2}{(1+i)j_{(m)}^3}
\end{aligned}
\right.
$$

si l'on pose comme précédemment $q = v^{\frac{1}{m}}$. En portant ces valeurs dans l'expression (29[1]), nous obtiendrons l'expression rigoureusement exacte de $a_{xy}^{(m)}$ qui résulte de l'hypothèse adoptée. En développant $(m - s)^2$ et $s(m - s)$ et en désignant les sommes (30-31-32) respectivement par A, B, C, nous obtenons :

$$
(33)\quad \left\{
\begin{aligned}
&a_x^{(m)} = (\mathrm{A} - 2\mathrm{B} + \mathrm{C})\,\mathbf{a}_{xy} + \\
&+ \left(\frac{l_{y+1}}{l_y}\,\mathbf{a}_{xy+1} + \frac{l_{x+1}}{l_x}\,\mathbf{a}_{x+1:y}\right)(\mathrm{B} - \mathrm{C}) + (1+i)\,a_{xy}\,\mathrm{C}
\end{aligned}
\right.
$$

L'expression (33) est trop compliquée pour qu'on puisse s'en servir utilement. On peut la simplifier en supposant $i = 0$ dans le calcul de A, B, C (ce qui revient à ne tenir compte que de l'influence de la mortalité dans le calcul de $a_{xy}^{(m)}$, en fonction de $a_{xy}$). On a alors :

$$
\mathrm{A} = \frac{m}{m} = 1
$$

$$
\mathrm{B} = \frac{1}{m^2}\sum_1^m s = \frac{m+1}{2m}
$$

$$
\mathrm{C} = \frac{1}{m^3}\sum_1^m s^2 = \frac{(2m+1)(m+1)}{6m^2}
$$



et si l'on suppose aussi

$$
(1+i)(\mathbf{a}_{xy} - 1)\,\mathrm{C} = \mathrm{C}\mathbf{a}_{xy} - \mathrm{C}
$$

l'équation (33) devient :

$$
(34)\quad \left\{
\begin{aligned}
&a_{xy}^{(m)} = \left(1 - \frac{(m+1)(m-1)}{3m^2}\right)\mathbf{a}_{xy} + \\
&+ \left(\frac{l_{y+1}}{l_y}\,\mathbf{a}_{x:y+1} + \frac{l_{x+1}}{l_x}\,\mathbf{a}_{x+1:y}\right)\frac{(m+1)(m-1)}{6m^3} - \\
&\qquad - \frac{(2m+1)(m+1)}{6m^2}
\end{aligned}
\right.
$$

A la limite pour $m = \infty$, nous obtenons la valeur de l'annuité continue :

$$
(35)\qquad \bar{a}_{xy} = \frac{2}{3}\,\mathbf{a}_{xy} + \frac{1}{6}\left(\frac{l_{y+1}}{l_y}\,\mathbf{a}_{x+1:y} + \frac{l_{x+1}}{l_x}\,\mathbf{a}_{x+1:y}\right) - \frac{1}{3}
$$

**12.** — Dans le calcul de l'annuité fractionnée ou continue, on peut employer utilement, avec Woolhouse, la formule de sommation d'Euler :

$$
h\sum_a^b f(x) = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{2}\,h\left[f(x)\right]_a^b + \\
+ \frac{1}{12}\,h^2\left[f'(x)\right]_a^b \ldots + (\text{un reste})\ (^1)
$$

En donnant à $a$ la valeur $x$ et en supposant $f(x) = 0$ pour les valeurs de $x$ supérieures à une certaine valeur finie $\omega$, cette formule devient :

$$
h\sum_x^\infty f(x) = \int_x^\infty f(x)\,dx + \frac{1}{2}\,hf(x) - \frac{1}{12}\,h^2 f'(x)
$$

Soit $f(x) = l_x v^x = \mathrm{D}_x$. On a évidemment alors :

$$
(37^1)\qquad \frac{1}{f(x)}\sum_x^\infty f(x) = \frac{1}{h} + a_x^{(h)}
$$

$$
(37^2)\qquad \frac{1}{f(x)}\int_x^\infty f(x)\,dx = \bar{a}_x
$$

(1) Pascal. — *Calcolo delle differenze finite*, Hœpli, 1897, page 291.

et l'équation (37) devient, en divisant les deux membres par $f(x)$ et en supposant $h = 1$ :

$$1 + a_x = \bar{a}_x + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\frac{f'(x)}{f(x)}$$

On a :

$$f'(x) = v^x \frac{d\,l_x}{dx} - v^x l_x \log v$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\mu_x + \log v = -(\mu_x + \delta)$$

d'où il résulte :

$$\bar{a}_x = a_x + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(\mu_x + \delta) \tag{38}$$

En posant $h = \frac{1}{m}$ dans l'équation (37) et en y remplaçant

$$\frac{1}{f(x)}\int_x^\infty f(x)\,dx = \bar{a}_x$$

par sa valeur tirée de (38), nous obtenons :

$$\left\{\begin{aligned} \mathbf{a}_x^{(m)} &= \frac{1}{m f(x)}\sum\nolimits_x^\infty f(x) = \\ &= \frac{1}{m}\left[f(x) + f\left(x + \frac{1}{m}\right) + f\left(x + \frac{2}{m}\right) + \dots\right]\frac{1}{f(x)} = \\ &= a_x + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(\delta + \mu_x) + \frac{1}{2m} - \frac{1}{12m^2}(\delta + \mu_x) = \\ &= a_x + \frac{m+1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\delta + \mu_x) \end{aligned}\right. \tag{39}$$

$$a_x^{(m)} = \mathbf{a}_x^{(m)} - \frac{1}{m} = a_x + \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\delta + \mu_x). \tag{40}$$

En général, les résultats fournis par les formules (38) et (28) coïncident. On peut étendre les formules (38-39-40) aux annuités sur plusieurs têtes, pour des groupes s'éteignant au premier décès,



en remplaçant $a_x$, $a_x^{(m)}$, $\bar{a}_x$ et $\mu_x$ respectivement par $a_{xy}$ ...., $a_{xy}^{(m)}$ ...., $\bar{a}_{xy}$ ... et $\mu_{xy}$ ... $= \mu_x + \mu_y + \dots$ (1).

On a dans tous les cas une approximation suffisante en prenant :

$$\mu_x = \frac{l_{x-1} - l_{x+1}}{2\,l_x}.$$

En remplaçant dans l'expression (40) $m$ par $\frac{1}{m}$, $(m > 1)$, elle devient

$$a_x^{\left(\frac{1}{m}\right)} = a_x - \frac{m-1}{2} - \frac{m^2-1}{12}(\mu_x + \delta)$$

d'où

$$a_x = a_x^{\left(\frac{1}{m}\right)} + \frac{m-1}{2} - \frac{m^2-1}{12}(\mu_x + \delta) \tag{41}$$

et on a ainsi une expression approchée de $a_x$, une fois qu'on a calculé $a_x^{\left(\frac{1}{m}\right)}$ :

$$\begin{aligned} a_x^{\left(\frac{1}{m}\right)} &= \frac{m}{f(x)}\left[f(x+m) + f(x+2m) + \dots\right] = \\ &= m\,\frac{D_{x+m} + D_{x+2m} + \dots}{D_x}. \end{aligned}$$

(1) La relation

$$\mu_{xy}\dots = \mu_x + \mu_y + \dots$$

résulte immédiatement des relations déjà vues (Ch. I, 2e Partie, § 12) :

$$p_{x_1}p_{x_2}\dots = G$$

$$\mu_{x_1} + \mu_{x_2} + \dots = -\frac{G'}{G}$$

si l'on remarque que

$$1 - p_{x_1}p_{x_2}\dots = 1 - G$$

est la probabilité de disparition du groupe et que $-\frac{G}{G}$ est par suite le coefficient instantané de dispersion du groupe : ce n'est donc pas autre chose que la quantité $\mu_{x_1 x_2}\dots$ qui doit remplacer le coefficient de mortalité $\mu_x$ dans les calculs relatifs à des groupes qui s'éteignent au premier décès.

**13.** — Nous avons vu que l'équation de survie de Makeham :

$$l_x = ks^x g^{c^x}$$

peut être mise sous la forme

$$l_x = Ce^{-\alpha x - \beta e^{\gamma x}}.$$

Il suffit de poser :

$$s = e^{-\alpha} \qquad g = e^{-\beta} \qquad c = e^{\gamma} \qquad k = C.$$

En tenant compte de l'équation :

$$v^x = e^{-\log(1+i)x} = e^{-\delta x}$$

on en déduit :

$$v^x l_x = Ce^{-(\alpha+\delta)x - \beta e^{\gamma x}} = Ce^{-\alpha' x - \beta e^{\gamma x}}$$

en posant $\alpha + \delta = \alpha'$. On en déduit aussi :

$$(1) \qquad \frac{v^{x+a}\, l_{x+a}}{v^a\, l_a} = \frac{Ce^{-\alpha'(x+a) - \beta e^{\gamma(x+a)}}}{Ce^{-\alpha' a - \beta e^{\gamma a}}} = C' e^{-\alpha' x - \beta' e^{\gamma x}}$$

en posant $\beta' = \beta e^{\gamma a}$, $e^{\beta'} = C'$.

Portons cette valeur (I) dans l'intégrale

$$\frac{1}{v^a l_a} \int_a^\infty v^x l_x\, dx = \int_0^\infty \frac{v^{x+a}\, l_{x+a}}{v^a l_a}\, dx$$

qui exprime la valeur de l'annuité viagère continue pour une tête d'âge $a$. Nous obtenons :

$$J = C' \int_0^\infty e^{-\alpha' x - \beta' e^{\gamma x}}\, dx$$

Nous nous proposons de calculer cette intégrale.

Effectuons la substitution $z = e^{\gamma x}$ et remarquons que lorsque $x$ parcourt l'intervalle $(0, \infty)$, $z$ parcourt l'intervalle $(1, \infty)$. L'intégrale devient :

$$J = \frac{C'}{\gamma} \int_1^\infty z^{-1-\frac{\alpha'}{\gamma}} e^{-\beta' z}\, dz = C'' \int_1^\infty e^{-\beta' z} z^{-\alpha''}\, dz$$



en posant

$$\frac{C'}{\gamma} = C'', \quad \alpha'' = 1 + \frac{\alpha'}{\gamma};$$

posons pour abréger $e^{-\beta' z} = u$ $z^{-\alpha''} = v$, désignons par $u'$, $u''$... les dérivées successives de $u$ par rapport à $z$ et par $v^{(-1)}$, $v^{(-2)}$... les intégrales $\int v dz$, $\int\int v dz$,..... Nous obtenons :

$$\frac{1}{C''} J = \int_1^\infty uv\, dz = [uv^{(-1)}]_1^\infty - \int_1^\infty u' v^{(-1)}\, dz =$$

$$= [u v^{(-1)} - u' v^{(-2)}]_1^\infty + \int_1^\infty u'' v^{(-2)}\, dz$$

$$J = C'' \left[ \frac{e^{-\beta' z} z^{1-\alpha''}}{1-\alpha''} + \frac{\beta' e^{-\beta' z} z^{2-\alpha''}}{(1-\alpha'')(2-\alpha'')} \right]_1^\infty +$$

$$+ C'' \int_1^\infty \frac{\beta'^2 e^{-\beta' z} z^{2-\alpha''}}{(1-\alpha'')(2-\alpha'')}\, dz = \frac{-C'' e^{-\beta'}}{1-\alpha''} - \frac{C'' \beta' e^{-\beta'}}{(1-\alpha'')(2-\alpha'')} +$$

$$+ \frac{C'' \beta'^2}{(1-\alpha'')(2-\alpha'')} \int_1^\infty e^{-\beta' z} z^{2-\alpha''}\, dz =$$

$$= \frac{2-\alpha''+\beta'}{\gamma(1-\alpha'')(2-\alpha'')} - \frac{C'' \beta'^2}{(\alpha''-1)(2-\alpha'')} \int_1^\infty e^{-\beta' z} z^{2-\alpha''}\, dz.$$

Décomposons l'intégrale

$$L = \int_1^\infty e^{-\beta' z} z^{2-\alpha''}\, dz$$

en deux autres intégrales

$$L_1 = \int_0^\infty e^{-\beta' z} z^{2-\alpha''}\, dz$$

$$L_2 = \int_0^1 e^{-\beta' z} z^{2-\alpha''}\, dz$$

en nous servant de la relation

$$\int_1^\infty = \int_0^\infty - \int_0^1.$$

Si l'on pose $t = \beta' z$, $L_1$ devient

$$\int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{t}{\beta'}\right)^{1-\alpha''}\frac{dt}{\beta'} = \frac{1}{\beta'^{3-\alpha''}}\int_0^\infty e^{-t}\, t^{2-\alpha''}\, dt$$

ou, en posant $n - 1 = 2 - \alpha''$,

$$\frac{1}{\beta'^{3-\alpha''}}\int_0^\infty e^{-t}\, t^{n-1}\, dt = \frac{\Gamma(3-\alpha'')}{\beta'^{3-\alpha''}}$$

où $\Gamma$ représente l'*intégrale eulérienne de deuxième espèce* (Cf. 1re partie, chap. I, note).

Pour calculer $L_2$ servons-nous de la relation

$$\int uv\,dz = uv^{(-1)} - u'v^{(-2)} + u''v^{(-3)} + (-1)^n \int u^{(n)}\, v^{(-n)}\, dz$$

qu'on obtient en intégrant par parties plusieurs fois de suite. Nous obtenons ainsi :

$$\int e^{-\beta' z}\, z^{2-\alpha''}\, dz = e^{-\beta' z}\frac{z^{3-\alpha''}}{3-\alpha''} + \beta' e^{-\beta' z}\frac{z^{4-\alpha''}}{(3-\alpha'')(4-\alpha'')} + \dots$$

$$+ \beta'^n \int \frac{e^{-\beta' z}\, z^{2+n-\alpha''}}{(3-\alpha'')(4-\alpha'')\dots(2+n-\alpha'')}\, dz$$

ou, si l'on intègre entre les limites 0 et 1 :

$$L_2 = \frac{e^{-\beta'}}{3-\alpha''}\left\{1 + \frac{\beta'}{4-\alpha''} + \frac{\beta'^2}{(4-\alpha'')(5-\alpha'')} + \dots\right\} + R_n$$

$$R_n = \beta'^n \int_0^1 \frac{e^{-\beta' z}\, z^{2+n-\alpha''}}{(3-\alpha'')(4-\alpha'')\dots(2+n-\alpha'')}\, dz.$$

Remarquons que la *fonction hypergéométrique*

$$F(a,b,c,x) = 1 + \frac{a.b}{c}x + \frac{a(a+1)\,b(b+1)}{c.(c+1)}x^2 + \dots$$

devient, quand on pose

$$a = a,\ b = 1,\ c = 1,\ c = c,\ x = \frac{x}{a}$$

$$F\left(a,1,c,\frac{x}{a}\right) = 1 + \frac{1}{c}x + \left(1 + \frac{1}{a}\right)\frac{1}{c(c+1)}x^2 + \dots$$



d'où

$$\lim_{a=\infty} F\left(a,1,c,\frac{x}{a}\right) = 1 + \frac{1}{c}x + \frac{1}{c(c+1)}x^2 + \dots = F(c,x)$$

et, pour les valeurs $x = \beta'$, $c = 4 - \alpha''$,

$$F(4-\alpha'',\beta') = 1 + \frac{1}{4-\alpha''}\beta' + \frac{1}{(4-\alpha'')(5-\alpha'')}\beta'^2 + \dots$$

expression qui est précisément celle qui figure entre crochets dans la valeur de $L_2$.

On voit de même que

$$\frac{(\beta' z)^n}{(3-\alpha'')(4-\alpha'')\dots(2+n-\alpha'')}$$

est le terme complémentaire de la série $F(3-\alpha'', \beta' z)$, série convergente si l'on a $|z| < 1$.

Etant donné un nombre $\varepsilon$ aussi petit qu'on le veut, on peut toujours choisir $n$ suffisamment grand pour que l'on ait :

$$\left|\frac{(\beta' z)^n}{(3-\alpha'')(4-\alpha'')\dots(2+n-\alpha'')}\right| < \varepsilon.$$

On en déduit qu'on peut faire en sorte que l'on ait :

$$|R_n| < \varepsilon.$$

Nous avons donc :

$$L = \frac{\Gamma(3-\alpha'')}{\beta'^{3-\alpha''}} + \frac{e^{-\beta'}}{3-\alpha''}F(4-\alpha'', \beta')$$

$$J = \frac{2-\alpha''+\beta'}{\gamma(\alpha''-1)(2-\alpha'')} -$$

$$-\frac{C''\beta'^2}{(\alpha''-1)(2-\alpha'')}\left[\frac{\Gamma(3-\alpha'')}{\beta'^{3-\alpha''}} + \frac{e^{-\beta'}}{3-\alpha''}F(4-\alpha'', \beta')\right]$$

ou, si l'on pose $\gamma' = 2 - \alpha'' = 1 - \frac{\alpha'}{\gamma}$,

$$J = \frac{\beta'+\gamma'}{\alpha'\gamma'} -$$

$$-\frac{e^{\beta'}\beta'^{1-\gamma'}}{\alpha'\gamma'}\Gamma(1+\gamma') + \frac{\beta'^2}{\alpha'\gamma'(\gamma'+1)}F(2+\gamma', \beta')$$

**15.** — Posons $i = 0$ dans l'expression :

$$\bar{a}_x = \frac{1}{v_x l_x} \int_x^\infty v^x l_x dx = \frac{(1+i)^x}{l_x} \int_x^\infty \frac{l_x}{(1+i)^x} dx$$

Elle devient

$$\frac{1}{l_x} \int_x^\infty l_x \, dx$$

qui n'est pas autre chose (Ch. I, 2, § 8) que la vie moyenne $E_x$ à l'âge $x$. Si l'on compare les deux expressions, il est évident d'autre part que la différence $E_x - \bar{a}_x$ est d'autant plus grande que le taux $i$ de l'intérêt est plus grand. On peut en effet concevoir $\bar{a}_x$ comme étant la vie moyenne d'une génération pour laquelle la loi de survie serait définie par la fonction

$$y = D_x = v^x l_x \qquad D_0 = l_0$$

et, puisque $v$ est inférieur à 1, à cette loi correspondrait une élimination plus rapide qu'à la loi définie par la fonction $y = l_x$ et d'autant plus rapide que $v$ est plus petit.

Une analyse facile montre d'ailleurs qu'il en est de même de la différence entre la valeur d'une annuité dont la durée coïncide avec la vie moyenne à l'âge $x$ et $a_x$ : cette différence, nulle en même temps que $i$, croît lorsque $i$ croit.

**16.** — Nous représenterons par $\overset{\circ}{a}\,\overset{\circ}{a}{}_x^{(m)}$ la valeur des rentes, dans l'hypothèse ou l'assureur est tenu de payer, le jour du décès de $(x)$ un fraction de rente proportionnelle au temps qui s'est écoulé depuis le début de la période au cours de laquelle le décès a eu lieu jusqu'au moment du décès (*annuité complète.*)

Une première valeur approchée de $\overset{\circ}{a}{}_x^{(m)}$ et de $\overset{\circ}{a}_x$ est fournie par le principe de Cauchy.

Supposons que la rente soit payable par termes échus, de valeur $\frac{1}{m}$ chacun, à la fin de chaque fraction $\frac{1}{m}$ d'année.



Si tous les décès qui ont lieu au cours de chaque période $\frac{1}{m}$ avaient lieu au début de cette période, on aurait évidemment

$$\overset{\circ}{a}{}_x^{(m)} = a_x^{(m)} .$$

Si tous les décès avaient lieu au contraire à la fin de la période on aurait :

$$\overset{\circ}{a}{}_x^{(m)} = \frac{a_x^{(m)} + \frac{1}{m}}{(1+i)^{\frac{1}{m}}} .$$

Nous avons vu en effet qu'une annuité fractionnée anticipée est donnée par la formule $\mathbf{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} + a_x^{(m)}$. Le nombre des payements effectués est évidemment le même, dans le cas qui nous occupe, pour l'annuité $\overset{\circ}{a}{}_x^{(m)}$ et pour l'annuité $a_x^{(m)}$. Mais chaque payement ayant lieu à la fin de la période $\frac{1}{m}$ au lieu d'avoir lieu au commencement, on devra avoir :

$$\overset{\circ}{a}{}_x^{(m)} = \frac{\mathbf{a}_x^{(m)}}{(1+i)^{\frac{1}{m}}} = \frac{a_x^{(m)} + \frac{1}{m}}{(1+i)^{\frac{1}{m}}} .$$

Le principe de Cauchy nous conduit à adopter la valeur suivante :

$$\overset{\circ}{a}{}_x^{(m)} = \frac{1}{2} \left\{ a_x^{(m)} + \frac{a_x^{(m)} + \frac{1}{m}}{(1+i)^{\frac{1}{m}}} \right\}$$

et, si l'on pose

(42) $$a_x^{(m)} = a_x + \frac{m-1}{2m}$$

$$(1+i)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{1}{m} i$$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{m} i} = 1 - \frac{1}{m}$$

on aura

$$(43)\quad \begin{cases} \overset{\circ}{a}{}_x^{(m)} = \left(1 - \frac{i}{2m}\right)a_x + \frac{1}{2m}\left(m - i\,\frac{m+1}{2m}\right) = \\ \qquad = \left(1 - \frac{i}{2m}\right)a_x - i\,\frac{m+1}{4m^2} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Pour $m = 1$ l'expression (43) devient

$$(44)\qquad \overset{\circ}{a}_x = \left(1 - \frac{1}{2}i\right)a_x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

**17.** — On obtient des formules très voisines des formules (43) et (44), mais plus correctes, à l'aide de la remarque suivante ; si on admet que les décès se répartissent uniformément au cours de chaque période $\frac{1}{m}$, on peut supposer qu'ils ont tous lieu au milieu de chaque période. Dans ce cas, l'assureur devrait payer $\frac{1}{2m}$ au moment du décès de $(x)$. Posons comme précédemment :

$$a_x^{(m)} = a_x + \frac{m-1}{2m}$$

Nous obtiendrons :

$$a_x + \frac{m-1}{2m} + \frac{1}{2m} = a_x + \frac{1}{2}$$

La somme $a_x + \frac{1}{2}$ correspond à une rente dont le montant serait de $\frac{1}{2m}$ au début de la première année et de $\frac{1}{m}$ au début de toutes les périodes $\frac{1}{m}$ suivantes. Mais le payemeut de la fraction de rente doit par hypothèse avoir lieu, en cas de mort, au milieu de la période $\frac{1}{m}$ au cours de laquelle le décès a lieu — en d'autres termes, à une époque en avance de $\frac{1}{2m}$ sur l'époque à laquelle devrait être effectué ce payement pour l'annuité $a_x + \frac{1}{2}$ ; il suffira donc de



donner à $\overset{\circ}{a}{}_x^{(m)}$ la valeur

$$\overset{\circ}{a}{}_x^{(m)} = \frac{a_x + \frac{1}{2}}{(1+i)^{\frac{1}{2m}}}$$

ou, si l'on pose

$$\frac{1}{(1+i)^{\frac{1}{2m}}} = 1 - \frac{1}{2m}i$$

$$(45)\quad \begin{cases} \overset{\circ}{a}{}_x^{(m)} = \left(1 - \frac{1}{2m}i\right)\left(a_x + \frac{1}{2}\right) = \\ \qquad = \left(1 - \frac{1}{2m}i\right)a_x + \frac{1}{2} - \frac{1}{4m}i \end{cases}$$

d'où, pour $m = 1$,

$$(46)\qquad \overset{\circ}{a}_x = \left(1 - \frac{1}{2}i\right)\left(a_x + \frac{1}{2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}i\right)a_x + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}i.$$

**18.** — L'hypothèse d'une répartition uniforme des décès au cours de chaque intervalle conduit à attribuer la valeur $dt$ à la probabilité pour que $(x)$ meure pendant l'intervalle $(t, t + dt)$.

Si le décès a lieu après un temps

$$\frac{s}{m} + t \qquad \left(t < \frac{1}{m},\ s = 0, 1, 2, \ldots m-1\right)$$

le montant de la somme qui doit être payée par l'assureur au moment du décès est $t$. L'espérance mathématique est donc

$$t\,dt$$

et les valeurs actuelles de cette espérance mathématique, rapportées au début et à la fin de l'année du décès sont respectivement

$$v^{\frac{s}{m}+t}\,dt$$
$$v^{\frac{s}{m}+t-1}\,dt\,.$$

$t$ peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle $\left(0, \frac{1}{m}\right)$ et $s$ les va-

leurs entières 0, 1,... $(m-1)$. La moyenne, rapportée à la fin de l'année, des valeurs des payements possibles à effectuer par suite du décès est donc :

$$\left(\sum_0^{m-1} v^{\frac{s}{m}} - 1\right) \int_0^{\frac{1}{m}} tv^t\,dt$$

On a

$$\sum_0^{m-1} v^{\frac{s}{m}} - 1 = \frac{v^{\frac{1}{m}} - 1}{1 - v^{\frac{1}{m}}} = \frac{i}{1 - v^{\frac{1}{m}}}$$

$$\int_0^{\frac{1}{m}} tvtdt = \left[-\frac{tv^t}{\delta} - \frac{v^t}{\delta^2}\right]_0^{\frac{1}{m}} = -\frac{v^{\frac{1}{m}}}{m\delta} - \frac{v^{\frac{1}{m}}}{\delta^2} + \frac{1}{\delta^2}$$

$$\frac{i}{1 - v^{\frac{1}{m}}}\left(\frac{1}{\delta^2} - \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m\delta} - \frac{v^{\frac{1}{m}}}{\delta^2}\right) = \frac{i}{\delta^2} - \frac{i}{\delta j_{(m)}}.$$

On obtient donc $\frac{i}{\delta^2} - \frac{i}{\delta j_{(m)}}$ comme valeur probable, rapportée à la fin de l'année du décès, du payement à effectuer par suite du décès. Mais ce payement peut avoir lieu à n'importe quelle année pendant toute la durée de l'opération : la différence

$$\mathring{a}_x^{(m)} - a_x^{(m)}$$

entre l'annuité complète et l'annuité simple, payables toutes deux à la fin de chaque période $\frac{1}{m}$, peut donc être considéré comme une assurance en cas de mort sur la tête $(x)$, de montant

$$\frac{i}{\delta^2} - \frac{i}{\delta j_{(m)}}$$

Désignons par $A_x$ la valeur d'une assurance en cas de mort, de montant 1, sur la tête $(x)$ (valeur que nous calculerons bientôt) nous aurons :

$$\mathring{a}_x^{(m)} - a_x^{(m)} = \left(\frac{i}{\delta^2} - \frac{i}{\delta j_{(m)}}\right) A_x$$



d'où :

$$\mathring{a}_x^{(m)} = a_x^{(m)} + \left(\frac{i}{\delta^2} - \frac{i}{\delta j_{(m)}}\right) A_x \tag{47}$$

Pour $m = 1$ l'expression

$$j_{(m)} = m\left\{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right\}$$

devient égale à $i$. On a donc, pour $m = 1$,

$$\mathring{a}_x = a_x + \left(\frac{i}{\delta^2} - \frac{1}{\delta}\right) A_x = a_x + \frac{i - \delta}{\delta^2} A_x \tag{48}$$

### III. — Assurance en cas de mort

**19.** — Soit $A_x$ la valeur de l'assurance d'un capital 1 payable à la fin de l'année du décès de l'assuré $(x)$ d'âge $x$.

La probabilité pour que le payement ait lieu à la fin de la $n^e$ année est évidemment la probabilité pour que $(x)$ atteigne l'âge $x + n - 1$ et n'atteigne pas l'âge $x + n$, c'est-à-dire (Chap. II, § 2, n° 7

$$_{n-1|}q_x = \frac{d_{x+n-1}}{l_x}$$

et la valeur de cette probabilité rapportée au début de l'opération est par conséquent

$$\frac{v^{x+n}\,d_{x+n-1}}{l_x}$$

Les égalités I et IV du § III (Chap. I)

$$v^x l_x = D_x$$

$$v^{x+1} d_x = vD_x - D_{x+1} = C_x$$

montrent que l'on a :

$$v^{x+1}\,\frac{d_{x+n-1}}{l_x} = \frac{C_{x+n-1}}{l_x}$$

On a évidemment

$$A_x = \frac{\sum_{n=1} C_{x+n-1}}{D_x} = \frac{vN_{x-1}}{D_x} - \frac{N_x}{D_x}$$

ou en posant (ibid., V)

$$\sum C_x = M_x,$$

(49) $$A_x = \frac{M_x}{D_x} = 1 - d\,\mathbf{a}_x$$

avec

$$d = 1 - v$$

A $i = 0$ correspondent les valeurs $v = 1$, $d = 0$.

$$A_x = 1$$

égalité qui est une conséquence évidente de la suivante :

$$\sum_{n=1} {}_{n-1}|q_x = 1$$

**20.** — On peut étendre la formule (49) au cas des groupes, en procédant comme on l'a fait pour les rentes des groupes s'éteignant au premier décès. Soit $A_{xy}\ldots$ la valeur actuelle d'un capital 1 payable à la fin de l'année du premier décès qui se produira dans le groupe $(x\,y\ldots)$ formé des individus $(x)$ $(y)$ .., Remarquons que la probabilité pour que tous les membres du groupe soient vivants au bout de $n - 1$ années et ne soient pas tous vivants au bout de $n$ années est

$$\frac{l_{x+n-1}}{l_x}\frac{l_{y+n-1}}{l_x}\ldots\left(1 - \frac{l_{x+1}}{l_x}\frac{l_{y+n}}{l_x}\ldots\right) =$$

$$\frac{l_{x+n-1}\,l_{y+n-1}\ldots - l_{x+n}\,l_{y+n}\ldots}{l_x l_y\ldots}$$

En introduisant alors le facteur d'escompte $v^n$ et en employant



les notations

$$vD_{xy\ldots} - D_{x+1:y+1:\ldots} = C_{xy\ldots}$$

$$\sum_{(x,y\ldots)} C_{xy\ldots} = M_{xy\ldots}$$

(Notations IX. X du § III du chap. I de cette partie), on trouve aisément :

$$A_{xy\ldots} = \frac{M_{xy\ldots}}{D_{xy\ldots}} = 1 - d\mathbf{a}_{xy\ldots}$$

**21.** — Si l'on considère des assurances temporaires de $m$ années ou temporaires de $n - m$ années et différées de $m$ années ou enfin différées de $n$ années, on est conduit aux relations suivantes :

(51) $${}_{|m}A = \frac{M - M_{(m)}}{D}$$

(52) $${}_{m|n-m}A = \frac{M_{(m)} - M_{(n)}}{D}$$

(53) $${}_{n|}A = \frac{M_{(n)}}{D}$$

(54) $$A = {}_{|m}A + \frac{D_{(m)}}{D}\,{}_{|n-m}A_{(m)}\,\frac{D_{(n)}}{D}\,A_{(n)}$$

(où A, M, D... sont les valeurs correspondant à l'âge initial ou aux âges initiaux et $A_{(m)}$, $M_{(m)}$, $D_{(m)}$ les valeurs correspondant aux mêmes âges augmentés de $m$).

Ces relations, indépendantes du nombre des têtes assurées, sont analogues à celles que nous avons obtenues pour les rentes viagères.

Si l'on a $m = n$, la relation (54) devient

$$A_x = {}_{|n}A + {}_{n|}A_x$$

d'où :

(55) $${}_{|n}A = 1 - d\,\mathbf{a} - \frac{D_{(n)}}{D}(1 - d\,\mathbf{a}_{(n)}) = 1 - d|_n\mathbf{a} - \frac{D_{(n)}}{D}.$$

**22.** — Posons :

$$A_{x,y\ldots\overline{n}|} = {}_{|n}A_{xy\ldots} + \frac{D_{x+n:y+n:\ldots}}{D_{xy\ldots}}. \tag{56}$$

La relation (55) donne

$$A_{x,y\ldots\overline{n}|} = 1 - d|_n\mathbf{a}_{xy\ldots} \tag{57}$$

ou, s'il s'agit d'une tête unique $(x)$

$$A_{x:\overline{n}|} = 1 - d|_n\mathbf{a}_x. \tag{58}$$

Les relations (57) et (58) déterminent la valeur d'un capital unité payable : 1°) à la fin de l'année du premier décès frappant le groupe $(x, y\ldots)$ (ou l'individu $(x)$) dans le cas où ce décès se produit à la fin de la $n^{ème}$ année ; 2°) au bout des $n$ années si aucun des membres du groupe $n'$ est mort avant cette époque (ou si l'individu $(x)$ est vivant à l'âge $x + n$) (*assurance mixte*). La formule (51) permet de remplacer les relations (57) et (58) par les suivantes :

$$A_{x\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} \tag{59}$$

$$A_{xy\ldots\overline{n}|} = \frac{M_{xy\ldots} - M_{x+n:y+n\ldots} + D_{x+n:y+n\ldots}}{D_{xy\ldots}} \tag{60}$$

applicables la première au cas d'une tête unique et la deuxième au cas de plusieurs têtes.

**23.** — Soit de même $(vA)^1_{x\overline{n}|}$ la valeur d'une assurance en cas de mort sur la tête $(x)$, temporaire de $n$ années et dont le montant annuel varie suivant la formule $(\alpha \pm \beta\,(r - 1)$ $(r = 0, 1, 2, \ldots n)$.

On a :

$$(vA)^1_{x\overline{n}|} = \alpha\frac{C_x}{D_x} + (\alpha \pm \beta)\frac{C_{x+1}}{D_x} + \ldots \left\{\alpha \pm (n-1)\beta\right\}\frac{C_{x+n-1}}{D_x} =$$

$$= \frac{1}{D_x}\left\{\alpha(C_x + C_{x+1} + \ldots C_{x+n-1}) \pm\right.$$

$$\left.\pm\beta\left\{C_{x+1} + 2C_{x+2} + \ldots + (n-1)C_{x+n-1}\right\}\right. =$$

$$= \frac{1}{D_x}\left\{\alpha(M_x - M_{x+n}) \pm \beta(M_{x+1} + M_{x+2} + \ldots M_{x+n} - nM_{x+n})\right\}$$



et, avec la notation VI (Chap. I, § III)

$$(vA)^1_{x\overline{n}|} = \frac{\alpha(M_x - M_{x+n}) \pm \beta\left\{R_{x+1} - R_{x+n-1} - nM_{x+n}\right\}}{D_x}. \tag{61}$$

Si l'on a $\alpha = \beta = 1$ et si le montant de l'assurance va en croissant, l'expression (61) devient :

$$\frac{R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}}{D_x} \tag{62}$$

qu'on représente d'habitude par $(IA)^1_{x\overline{n}|}$. On représente de même par $(I_{\overline{n}|}A)_x$ la valeur d'une assurance s'étendant sur la durée entière de la vie croissant pendant les $n$ premières années depuis 1 jusqu'à $n$ et restant ensuite constante et égale à $n$. On a évidemment :

$$(I_{\overline{n}|}A)_x = (IA)^1_{x\overline{n}|} + n_{n|}A_x = \frac{R_x - R_{x+n}}{D_x}. \tag{63}$$

Supposons $x + n > \omega$. Il n'y a plus lieu alors de considérer la période durant laquelle l'assurance temporaire fonctionne et, comme on a :

$$M_{x+n} = R_{x+n} = 0$$

les expressions (61) et (62) deviennent respectivement :

$$(vA)_x = \frac{\alpha M_x \pm \beta R_{x+1}}{D_x} \tag{64}$$

$$(IA)_x = \frac{R_x}{D_x} = A_x + {}_{1|}A_x + {}_{2|}A_x + \ldots.. \tag{65}$$

valeur qui coïncide avec la valeur (63) lorsqu'on tient compte dans celle-ci de l'inégalité $x + n > \omega$.

Si on considère des assurances sur des groupes de têtes au lieu d'assurances sur des têtes isolées, on est conduit à des formules ayant la même forme que celles que nous venons d'établir.

**24.** — Proposons-nous de chercher la valeur $A_x^{(m)}$ d'une assurance en cas de mort égale à l'unité, lorsque le payement de la

somme assurée doit avoir lieu non plus à la fin de l'année du décès, mais à la fin de la période $\frac{1}{m}$ pendant laquelle a eu lieu le décès.

Si le payement de la somme égale à l'unité devait avoir lieu à la fin d'une période égale à la fraction $\frac{s}{m}$ d'année, au lieu d'avoir lieu à la fin de l'année, la valeur de l'assurance rapportée au début de l'opération serait évidemment

$$A_x(1+i)^{\frac{m-s}{m}}.$$

L'assurance actuelle diffère en effet de l'assurance normale $A_x$ en ce que le payement du capital assuré doit avoir lieu à une époque en avance de $\frac{m-s}{m}$ sur l'époque à laquelle serait effectué le payement pour l'assurance normale.

Si on admet une répartition uniforme des décès sur toute l'année, on est conduit à attribuer la même probabilité à des décès se produisant pendant la première, la deuxième..., la $n^{ème}$ période. On peut donc prendre comme expression de $A_x^{(m)}$ la moyenne arithmétique entre

$$A_x(1+i)^{\frac{m-1}{m}},\ A_x(1+i)^{\frac{m-2}{m}},\ \ldots\ A_x(1+i)^{\frac{m-m}{m}}.$$

On a alors :

$$(66)\quad \left\{\begin{aligned} A_x^{(m)} &= \frac{1}{m} A_x \left\{ (1+i)^{\frac{m-1}{m}} + (1+i)^{\frac{m-2}{m}} + \ldots + 1 \right\} = \\ &= A_x \frac{i}{m\left\{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right\}} = A_x \frac{i}{j_{(m)}}. \end{aligned}\right.$$

On appelle assurance continue en cas de mort l'assurance définie par l'égalité.

$$\lim_{m=\infty} A_x^{(m)} = A_x.$$

C'est la valeur d'une assurance dans laquelle le payement de la somme assurée devrait être effectué à l'instant précis du décès.



L'égalité

$$\lim_{m=\infty} j_{(m)} = \log(1+i) = \delta$$

montre que l'on a :

$$(67)\qquad \overline{A}_x = A_x \frac{i}{\delta}.$$

En développant $j_{(m)}$ et $\delta$ en séries, on a trouvé, 1re partie, chap. III (12), (13) :

$$j_{(m)} = i - \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right)i^2 + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(2-\frac{1}{m}\right)i^3$$

$$\delta = i - \frac{1}{2}i^2 + \frac{1}{3}i^3 \ldots$$

et en limitant ces développements aux termes en $i^2$, nous trouvons :

$$\frac{i}{j_{(m)}} = \frac{1}{1 - \frac{m-1}{2m}i + \ldots}$$

$$\frac{i}{\delta} = \frac{1}{1 - \frac{i}{2} + \ldots}$$

expressions à peu près égales à

$$(1+i)^{\frac{m-1}{2m}}$$

et à

$$\sqrt{1+i}$$

On prend en effet quelquefois pour $A_x^{(m)}$ et $\overline{A}_x$ les expressions suivantes qui ne sont guère plus simples que les précédentes et qui sont moins correctes :

$$(68)\qquad A_x^{(m)} = A_x(1+i)^{\frac{m-1}{2m}}$$

$$(69)\qquad \overline{A}_x = A_x\sqrt{1+i}.$$

**25.** — Si l'on suppose la fonction $l_x$ dérivable,

$$\frac{l_{x+t} - l_{x+t+dt}}{l_x} = -\frac{dl_{x+t}}{l_x}$$

exprime la probabilité pour que $(x)$ meure pendant l'intervalle $(t, t + dt)$ et

$$-v^t \frac{dl_{x+t}}{l_x}$$

est la valeur de cette probabilité escomptée au début de l'opération. Il en résulte que l'on a :

$$\bar{A}_x = -\frac{1}{l_x}\int_x^\infty v^t dl_{x+t}. \tag{70}$$

L'intégration par parties donne

$$\bar{A}_x = -\frac{1}{l_x}\left(v^t l_{x+t} - \log v \int v^t l_{x+t} dt\right)_0^\infty$$

et, puisque

$$-\log v = \delta$$

$$\frac{1}{l_x}\int_0^\infty l_{x+t} v^t dt = \frac{1}{v^t l_x}\int_x^\infty l_x v^x dx = \bar{a}_x,$$

on a :

$$\bar{A}_x = -\frac{1}{l_x}(-l_x + \delta l_x \bar{a}_x) = 1 - \delta \bar{a}. \tag{71}$$

Si l'on porte dans (71) la valeur de $\bar{a}_x$ tirée de (28)

$$a_x = \frac{1}{\delta} - \frac{i(1 - i a_x)}{(1 + i)\delta^2}$$

et si on remarque que l'on a :

$$1 - i a_x = 1 + i - i \mathbf{a}_x$$

$$1 - d\,\mathbf{a}_x = \mathbf{A}_x$$



on obtient de suite :

$$\bar{A} = \frac{i}{\delta(1 + i)}(1 - i a_x) = \frac{i}{\delta} A_x$$

ce qui est précisément l'expression de $A_x$ déjà établie précédemment.

**26.** — La probabilité pour que l'un des membres du groupe $(x, y, z\ldots)$ meure pendant l'intervalle $(t, t + dt)$ est, d'une façon toute semblable :

$$\frac{l_{y+t}}{l_y}\frac{l_{z+t}}{l_z}\ldots\frac{l_{x+t} - l_{x+t+dt}}{l_x} + \frac{l_{y+t} - l_{y+t+dt}}{l_y}\frac{l_{x+t}}{l_x}\frac{l_{z+t}}{l_z}\ldots =$$
$$= -\frac{d[l_{x+t} l_{y+t} l_{z+t}\ldots]}{dt}\frac{1}{l_x l_y l_z\ldots}.$$

On en déduit que la valeur $\bar{A}_{xyz}\ldots$ d'une assurance en cas de mort payable au moment précis du premier décès qui atteint le groupe $(x, y, z)$ est :

$$-\frac{1}{l_x l_y l_z}\int^\infty v^t d\,[l_{x+t}\, l_{y+t}\, l_{z+t}\ldots] \tag{72}$$

Ici encore l'intégration par parties donne :

$$\bar{A}_{xyz}\ldots = 1 - \delta \bar{a}_{xyz}\ldots \tag{73}$$

### IV. — Rentes réversibles — Capital payable au $r^{ème}$ décès d'un groupe

**27.** — Soit $a_{\frac{r}{xyz\ldots(m)}}$ la valeur d'une annuité payable tant que $r$ têtes au moins vivent, sur les $m$ têtes données (rente réversible).

Si ${}_np_{\frac{r}{xyz\ldots(m)}}$ représente la probabilité pour que au bout de $n$ années, $r$ têtes au moins survivent, sur les $m$ têtes données, on a évidemment :

$$a_{\frac{r}{xyz\ldots(m)}} = \sum v^n\, {}_np_{\frac{r}{xyz\ldots(m)}} \tag{74}$$

Or nous avons vu que l'on a :

$$ {}_{n}p_{\overline{xyz\ldots(m)}}^{\;r} = \frac{Z^r}{(1+Z)^r} = Z^r - \binom{r}{1} Z^{r-1} + \ldots $$

$Z^k$ étant la somme des probabilités de survie ${}_{n}p_{xyz\ldots(k)}$ de plusieurs groupes de $k$ têtes, en nombre égal au nombre des combinaisons de $m$ éléments $k$ à $k$ (voir pages 162 et suivantes). Il en résulte que $a_{\overline{xyz\ldots(m)}}^{\;r}$ se trouve exprimé par une somme d'annuités cessant de fonctionner au premier décès

$$ \sum_{n=1} v^n \, {}_{n}p_{xy\ldots(k)} = a_{xy\ldots(k)} $$

où $k$ reçoit les valeurs entières de l'intervalle $(r, m)$.

Si $r$ est égal à 1, on désigne $a_{\overline{xyz\ldots(m)}}^{\;r}$ simplement par $a_{\overline{xyz\ldots(m)}}$ : c'est la valeur d'une annuité cessant de fonctionner au dernier décès.

On a enfin d'une façon évidente :

$$ a_{\overline{xy\ldots(m)}}^{\;m} = a_{xy\ldots(m)}. $$

**28.** — Soit $a_{\overline{xy\ldots(m)}}^{\;[r]}$ la valeur d'une annuité qui doit être payée à la fin de chaque année de la période pendant laquelle parmi les $m$ têtes $(x)$, $(y)$ ..., il y en a exactement $r$ en vie (autrement dit à la fin de chacune des années comprises entre le $\overline{m-r}^{ème}$ et le $\overline{m-r+1}^{ème}$ décès du groupe). On peut exprimer cette annuité comme différence entre l'annuité $a_{\overline{xy\ldots(m)}}^{\;r-1}$ payable tant que $\overline{r-1}$ au moins des $m$ têtes survivent et l'annuité $a_{\overline{xy\ldots(m)}}^{\;r}$ payable au contraire tant que $r$ au moins des $m$ têtes survivent :

75) $$ a_{\overline{xy\ldots(m)}}^{\;[r]} = a_{\overline{xy\ldots(m)}}^{\;r-1} - a_{\overline{xy\ldots(m)}}^{\;r} $$



On peut aussi se servir de la relation :

$$ a_{\overline{xy\ldots(m)}}^{\;[r]} = \sum_{n=1} v^n \, {}_{n}p_{\overline{xy\ldots(m)}}^{\;[r]}. $$

Nous avons vu (pages 162 et suivantes) que l'on a :

$$ {}_{n}p_{\overline{xy\ldots(m)}}^{\;[r]} = \frac{Z^r}{[Z+1]^{r+1}} = Z^r - \binom{r+1}{1} Z^{r+1} + \ldots $$

On peut donc répéter pour $a_{\overline{xy\ldots(m)}}^{\;[r]}$ ce que nous avons déjà remarqué pour $a_{\overline{xy\ldots(m)}}^{\;r}$ : sa valeur s'exprime par une somme de valeurs d'annuités de la forme $a_{xy\ldots(k)}$, $k$ prenant toutes les valeurs entières de l'intervalle $(r, m)$.

**29.** — Représentons enfin par $A_{\overline{xy\ldots(m)}}^{\;r}$ la valeur de l'assurance du capital 1 payable à la fin de l'année où, par suite du $\overline{m-r}^{ème}$ décès du groupe $(x, y \ldots m)$, il n'y a plus que $r$ survivants. On voit de suite que l'on a :

(76) $$ A_{\overline{xy\ldots(m)}}^{\;r} = 1 - d\,(1 + a_{\overline{xy\ldots(m)}}^{\;r}) = 1 - d\mathbf{a}_{\overline{xy\ldots(m)}}^{\;r}. $$

En effet, le capital qui rapporte $i$ à la fin de chaque année — ou, ce qui revient au même, $\frac{i}{1+i}$ au début de chaque année — a pour valeur 1 ; $\frac{i}{1+i}\, a_{\overline{xy\ldots(m)}}^{\;r}$ sera donc la valeur d'une annuité anticipée temporaire de montant $\frac{i}{1+i}$, payable tant que $r$ au moins des $m$ personnes vivent et

$$ 1 - \frac{i}{1+i}\, \mathbf{a}_{\overline{xy\ldots(m)}}^{\;[r]} $$

sera la valeur d'un capital rapportant $\frac{i}{1+i}$ au début de chaque

année, et indéfiniment, mais à partir seulement de l'année où on cesse de payer l'annuité

$$\frac{i}{1+i} - a_{\overline{xy\ldots(m)}}^{\;r}$$

ou, en d'autres termes, à la fin de l'année du $\overline{m-r}^{\text{ème}}$ décès. Ce capital étant précisément le capital 1 qu'on paye à la fin de l'année du $\overline{m-r}^{\text{ème}}$ décès, la formule (76) se trouve établie.

Le raisonnement précédent est tout à fait général : on pourrait l'étendre sans aucun changement aux assurances de capitaux payables au premier décès ainsi qu'aux assurances de personnes isolées et, d'une façon générale, aux assurances dont le payement est subordonné à une éventualité quelconque. Il montre le rapport étroit qu'il y a entre les annuités et les assurances en cas de mort, rapport déjà mis en évidence au point de vue purement algébrique.

**30.** — Soit $m = 2$ : c'est le cas de deux têtes $(x)$, $(y)$. L'équation (74) donne :

(77) $$\bar{a}_{xy} = a_x + a_y - a_{xy}$$

et l'équation (76) :

(78) $$\left\{\begin{aligned} A_{\overline{xy}} &= 1 - d\,\mathbf{a}_{\overline{xy}} = 1 - d\,\mathbf{a}_x + 1 - d\,\mathbf{a}_y - \\ &\quad - (1 - d\,\mathbf{a}_{xy}) = A_x + A_y - A_{xy} \end{aligned}\right.$$

On aurait pu établir cette équation directement en remarquant que la probabilité pour que $(x)$ et $(y)$ soient morts tous les deux avant la fin de la $n^{\text{ème}}$ année est la somme de la probabilité pour que tous deux soient morts au cours de la $n^{\text{ème}}$ année et de la probabilité pour que l'un d'eux soit mort au cours de la $n^{\text{ème}}$ année et l'autre avant le commencement de cette $n^{\text{ème}}$ année ; cette somme est :

$$_{n-1}|q_x\,(1 - {}_{n-1}p_y) + {}_{n-1}q_y\,(1 - {}_{n-1}p_x) + {}_{n-1}|q_{x\cdot y}$$

elle se ramène aisément à

$$_{n-1}|q_x + {}_{n-1}|q_y - {}_{n-1}|q_{xy}.$$



En introduisant le facteur d'escompte $v^n$ et en effectuant la sommation par rapport à $n$, on déduit de là :

$$A_{\overline{xy}} = \sum_{n=1} v^n\,{}_{n-1}|q_x + \sum_{n=1} v^n\,{}_{n-1}|q_y - \sum_{n=1} v^n\,{}_{n-1}|q_{xy}$$

d'où l'on tire l'équation (78).

Nous aurions pu écrire immédiatement les équations (77) et (78) en nous servant d'une remarque bien simple : $a_x + a_y$ est la valeur d'une annuité de montant 2 tant que $(x)$ et $(y)$ sont tous les deux en vie et de montant 1 pendant la période de survie de $(x)$ seul ou de $(y)$ seul. En retranchant $a_{xy}$, le montant de l'annuité se réduit à 1 et elle cesse de fonctionner au premier décès : on a donc dans l'ensemble une annuité fonctionnant jusqu'à la mort de l'un des deux individus $(x)$ et $(y)$.

D'une façon analogue, $A_x + A_y$ est la valeur d'une assurance de montant 2 payable par moitiés au premier et au second décès. En retranchant la valeur $A_{xy}$ d'une assurance de montant 1 payable au premier décès, il reste seulement une assurance de montant 1 payable au second décès.

**31.** — Soit $m = 3$ : c'est le cas de trois têtes $(x)$ $(y)$ $(z)$. On a :

(79) $$a_{\overline{xyz}}^{\;2} = a_{xy} + a_{yz} + a_{yz} - 2\,a_{xyz}$$

(80) $$a_{\overline{xyz}} \equiv a_x + a_y + a_z - (a_{xy} + a_{yz} + a_{yz}) + a_{xyz}$$

(81) $$A_{\overline{xyz}}^{\;2} = A_{xy} + A_{yz} + A_{xz} - 2\,A_{xyz}$$

(82) $$A_{\overline{xyz}} = A_x + A_y + A_z - (A_{xy} + A_{xz} + A_{yz}) + A_{xyz}$$

**32.** — D'une façon tout-à-fait générale, imaginons une rente de montant variable, définie par

(83) $$hZ_1 + kZ_2 \ldots + sZ_{m-1} + tZ_m$$

où $Z_r$ représente la somme des $\binom{m}{r}$ annuités sur $r$ têtes qu'on obtient en combinant les $m$ têtes $r$ à $r$.

Le premier terme de (83) définit une annuité de montant $mh$ lorsque tous les individus sont en vie ;

$(m-1)h$ lorsque tous les individus sauf un sont en vie ;

et ainsi de suite.

Le second terme de (83) définit une annuité de montant

$\binom{m}{2}k$ lorsque tous les individus sont en vie ;

$\binom{m-1}{2}k$ lorsque tous les individus sauf un sont en vie ;

et ainsi de suite.

Le $m^{\text{ème}}$ terme de (83) définit une annuité de montant $t$ payable tant que tous les individus du groupe sont en vie.

Par suite :

$$\binom{m}{1}h + \binom{m}{2}k + \binom{m}{3}l + \ldots + \binom{m}{m}t \tag{84}$$

est le montant total de l'annuité considérée pendant la période où tous les membres du groupe sont en vie ;

$$\binom{m-1}{1}h + \binom{m-1}{2}k + \binom{m-1}{3}l + \ldots + \binom{m-1}{m-1}s \tag{85}$$

le montant total de l'annuité considérée pendant la période où tous les individus sauf un sont en vie ; et ainsi de suite.

Egalons l'expression (84) à $G_1$, l'expression (85) à $G_2$, ..., l'expression (86)

$$\binom{1}{1}k \tag{86}$$

à $G_m$ : le système de $m$ équations ainsi défini permet d'obtenir les valeurs de $h, k, l \ldots s$, qui, adjointes aux valeurs Z, fourniront la valeur d'une annuité de montant $G_1$ pendant la période où les $m$ individus sont tous en vie, de montant $G_2$ pendant la période où $m-1$ des $m$ individus sont en vie, et ainsi de suite



On voit immédiatement qu'à

$$G_1 = G_2 = \ldots = G_m = 1$$

correspond $a_{\overline{xy\ldots(m)}}^{\ r}$ ; à

$$G_1 = G_2 = \ldots = G_{r-1} = G_{r+1} = \ldots = G_m = 0$$
$$G_r = 1$$

correspond $a_{\overline{xy\ldots(m)}}^{\ [r]}$.

## V. — Rentes et capitaux de survie.

**33.** — Soit un groupe $(x, y)$.

On peut imaginer une annuité payable à partir du décès de $(x)$ jusqu'au décès de $(y)$ : nous la représenterons par $a_{x|y}$.

On a évidemment

$$\left\{\begin{aligned} a_{x|y} &= \sum_{n=1} v^n\, {}_np_y\,(1 - {}_np_x) = \\ &= \sum_{n=1} v^n\, {}_np_y - \sum_{n=1} v^n\, {}_np_{xy} = a_y - a_{xy} \end{aligned}\right. \tag{87}$$

et de même

$$|_na_{x|y} = \sum_{n=1} v^n\, {}_np_y\,(1 - {}_np_x) = |_na_y - |_na_{xy} \tag{88}$$

représente la valeur d'une rente payable à $(y)$ à partir du décès de $(x)$, mais jusqu'à l'âge $y + n$ seulement et

$$_n|a_{x|y} = a_{x|y} - |_na_{x|y} = {}_n|a_y - {}_n|a_{xy} \tag{89}$$

représente la valeur d'une rente payable à $(y)$, après le décès de $(x)$, mais à partir de l'âge $y + n$ seulement.

On peut aussi remplacer $a_{x|y}$ par une annuité différée ou temporaire conçue dans un autre sens, l'annuité ne devant pas être payée si le décès de $(x)$ se produit avant $n$ années, ou s'il ne se produit pas avant $n$ années.

Dans le premier cas, on a une rente $a_{x+n,\, y+n}$ différée de $n$ années et subordonnée à l'existence de $(x)$ et de $(y)$ pendant $n$ années encore : la valeur cherchée est donc :

(90) $$v^n \, {}_np_{xy} \, a_{x+n|y+n} = {}_nE_{xy} \, (a_{y+n} - a_{x+n:y+n})$$

Dans le second cas on doit, pour obtenir la valeur cherchée, déduire de $a_{x|y}$ la valeur d'une annuité payable à $(y)$, mais seulement à partir de l'âge $y + n$, et à condition que $(x)$ meure à un âge supérieur à $x + n$. On obtient donc

(91) $$a_{x|y} - {}_nE_{xy} \, (a_{y+n} - a_{x+n:y+n}).$$

**34.** — L'expression

$${}_tp_y \, (1 - {}_tp_x)$$

pouvant s'écrire

$$\frac{l_{y+t}}{l_y} \, \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}$$

on obtient de suite la valeur de la rente continue à servir à $(y)$ jusqu'au moment de son décès, à partir du moment du décès de $(x)$ : il suffit de faire varier $t$ d'une façon continue et d'intégrer par rapport à $t$, ce qui donne :

(92) $$\frac{1}{l_x \, l_y} \int_0^\infty l_{y+t} \, (l_x - l_{x+t}) dt.$$

Nous désignerons cette quantité par $\bar{a}_{x|y}$.

**35.** — Les expressions de l'annuité $a_{x|y}$ fractionnée et de l'annuité complète sont évidemment :

(93) $$a^{(m)}_{x|y} = a^{(m)}_y - a^{(m)}_{xy}$$

(94) $$\mathring{a}_{x|y} = \mathring{a}_y - \mathring{a}_{xy}.$$



Si l'on pose (40)

$$a^{(m)}_y = a_y + \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2} (\delta + \mu_y)$$

$$a^{(m)}_{xy} = a_{xy} + \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2} (\delta + \mu_y + \mu_x)$$

l'expression (93) devient

(95) $$a^{(m)}_{x|y} = a_x - a_{xy} + \frac{m^2-1}{12m^2} \mu_x$$

et, à la limite pour $m = \infty$,

(96) $$\bar{a}_{x|y} = a_x - a_{xy} + \frac{1}{12} \mu_x$$

expression dans laquelle $\frac{1}{12}\mu_x$ est pratiquement négligeable.

Si l'on pose de même (44)

$$\mathring{a}_y = \left(1 - \frac{1}{2} i\right) a_y + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} i$$

$$\mathring{a}_{xy} = \left(1 - \frac{1}{2} i\right) a_{xy} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} i$$

l'expression (94) devient :

(97) $$\mathring{a}_{x|y} = \left(1 - \frac{1}{2} i\right) (a_y - a_{xy})$$

où $\mathring{a}_{x|y}$ désigne la valeur d'une annuité complète en faveur de $(y)$, le premier payement ayant lieu un an exactement après le décès de $(x)$.

**36.** — Soit maintenant le groupe $(x, y, z)$.

On peut supposer que la rente soit payable depuis le décès de $(x)$ jusqu'au premier décès du groupe $(y, z)$ ou jusqu'au second décès du même groupe — ou bien qu'elle soit payable depuis le premier décès du groupe $(xy)$ jusqu'au décès de $(z)$.

Si on représente les annuités ainsi définies respectivement par :

$$a_{x|yz}, \quad a_{x|\overline{yz}}, \quad a_{xy|z}, \quad a_{\overline{xy},\, z},$$

on a les relations

$$(98) \quad \begin{cases} a_{x|yz} = a_{yz} - a_{xyz} \\ a_{x|\overline{yz}} = a_{yz} - a_{\overline{yz}:x} \\ a_{xy|z} = a_z - a_{xyz} \\ a_{\overline{xy}|z} = a_z - a_{z:\overline{xy}} \end{cases}$$

déduites de (87) en y remplaçant $y$ par $yz$ ou $\overline{yz}$ ou bien en y remplaçant $x$ par $xy$ ou $\overline{xy}$.

On peut étendre immédiatement ces formules à un nombre quelconque de têtes et à n'importe quel état des groupes considérés. On voit en effet de suite que l'on a, par exemple :

$$a_{xyz|abc} = a_{abc} - a_{abcxyz}$$
$$a_{\overline{xyz}|abc} = a_{abc} - a_{abc:\overline{xyz}}$$
$$a_{\overline{xyz}|\overline{abc}} = a_{\overline{abc}} - a_{\overline{abc}:\overline{xyz}} = a_{\overline{abcxyz}} - a_{\overline{xyz}}$$

**37.** — Les relations

$$\bar{a}_{x|yz} = \frac{1}{l_x l_y l_z} \int_0^\infty v^t\, l_{y+t}\, l_{z+t}\, (l_x - l_{x+t})\, dt =$$
$$= \bar{a}_{yz} - a_{xyz}$$
$$\bar{a}_{x|\overline{yz}} = \int_0^\infty v^t \left( \frac{l_{y+t}}{l_y} + \frac{l_{z+t}}{l_z} - \frac{l_{y+t}\, l_{z+t}}{l_y\, l_z} \right) \left( 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x} \right) dt =$$
$$= \bar{a}_y + \bar{a}_z - (\bar{a}_{yz} + \bar{a}_{yx} + \bar{a}_{xz}) + \bar{a}_{xyz}$$

et les autres relations analogues sont de même des généralisations évidentes de la formule (92) auxquelles on est conduit en considérant les probabilités relatives aux divers états possibles du groupe.

**38.** — Soit $A^1_{xy}$ la valeur de l'assurance d'un capital 1 payable à la fin de l'année du décès de $(x)$, si $(x)$ meurt avant $(y)$.



Si on représente par ${}_{n-1|}q^1_{xy}$ la probabilité pour que $(x)$ meure au cours de la $n^{\text{ème}}$ année et que $(y)$ survive à $(x)$, on a évidemment :

$$(99) \qquad A^1_{xy} = \sum_{n=1} v^n\, {}_{n-1|}q^1_{xy}$$

et à cause des relations (17) et (18) du Chap. I :

$$(100) \quad \begin{cases} A^1_{xy} = \sum_{n=1} v^n \frac{1}{2} \left( {}_{n-1}p_{xy} - {}_np_{xy} - \frac{{}_np_{x:y-1}}{p_{y-1}} - \frac{{}_np_{x-1:y}}{p_{x-1}} \right) = \\ \qquad = \frac{1}{2} \left( A_{xy} - \frac{a_{x:y-1}}{p_{y-1}} + \frac{a_{x-1:y}}{p_{x-1}} \right) \end{cases}$$

Mais on a aussi, en exprimant les probabilités ${}_np_{xy}$ qui figurent dans (99) au moyen de $l_x$ et de $l_y$ :

$${}_{n-1|}q^1_{xy} = \frac{1}{2} \frac{l_{x+n-1} - l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n-1} + l_{y+n}}{l_y}.$$

Supposons que $l_x$ varie linéairement dans l'intervalle d'une année et supposons par suite que l'on ait :

$$l_{y+n-1} + l_{y+n} = 2 l_{y+n-\frac{1}{2}}.$$

On aura alors

$${}_{n-1|}q^1_{xy} = \frac{d_{x+n-1}}{l_x} \frac{l_{y+n-\frac{1}{2}}}{l_y}$$

$$(101) \qquad A^1_{xy} = \sum v^n \frac{d_{x+n-1}\, l_{y+n-\frac{1}{2}}}{l_x\, l_y} = \frac{\sum C^1_{xy}}{D_{xy}} = \frac{M^1_{xy}}{D_{xy}}$$

en se servant des notations XI et XII du § III du Chap. I.

**39.** — On a, à cause de la relation (100) :

$$A^1_{xy} = \frac{1}{2} \left( A_{xy} - \frac{a_{y-1:x}}{p_{y-1}} + \frac{a_{x-1:y}}{p_{x-1}} \right)$$
$$A^1_{xy} = \frac{1}{2} \left( A_{xy} - \frac{a_{x-1:y}}{p_{x-1}} + \frac{a_{y-1:x}}{p_{y-1}} \right)$$

et par suite :

$$A^{1}_{xy} = A^{1}_{xy} = A_{xy}. \tag{102}$$

La somme d'une assurance payable au décès de $(x)$ en cas de survie de $(y)$ et d'une assurance payable au décès de $(y)$ en cas de survie de $(x)$ est en effet simplement une assurance en faveur du groupe $(xy)$ payable au premier décès.

De même la valeur $A^{2}_{xy}$ d'un capital payable à la fin de l'année du décès de $(x)$, si $(y)$ est déjà mort à ce moment, est définie par la relation :

$$A^{1}_{xy} + A^{2}_{xy} = A_{x} \tag{103}$$

car la somme $A^{1}_{xy} + A^{2}_{xy}$ constitue une assurance dont le montant doit être payé dans tous les cas à la fin de l'année du décès de $(x)$.

Il est évident, d'après les relations (102) et (103) et d'après l'inégalité $A_{xy} > A_{x}$, que l'on doit avoir :

$$A^{1}_{xy} - A^{2}_{xy} > 0.$$

Dans le cas où $i = 0$ $v = 1$, on a :

$$A^{2}_{xy} = A^{1}_{xy} = Q^{1}_{xy}$$

$Q^{1}_{xy}$ étant la quantité définie par la relation (18) du Chap. I.

**40.** — Dans le cas de trois têtes $(x, y, z)$, on a, à cause de la relation (19) (Chap. I) :

$$\left\{\begin{aligned} A^{1}_{xyz} &= \sum_{n=1} v^{n}\, {}_{n-1}|\, q^{1}_{xyz} = \\ &= \frac{1}{3}\left(A_{xyz} - \frac{a_{x:y-1:z-1}}{p_{y-1:z-1}} + \frac{a_{x-1:yz}}{p_{x-1}}\right) + \\ &+ \frac{1}{6}\left(\frac{a_{x-1:y:z}}{p_{x-1:y-1}} - \frac{a_{x:y:z-1}}{p_{z-1}} + \frac{a_{x-1:y:z-1}}{p_{x-1:z-1}} - \frac{a_{x:y-1:z}}{p_{y-1}}\right) \end{aligned}\right. \tag{104}$$



De même les relations (21) à (25) de la première partie donnent en remplaçant dans les diverses sommations ${}_{n-1}|\, q$ par $v^{n}_{n-1}|\, q$ :

$$\left\{\begin{aligned} A^{2}_{\underset{1}{xyz}} &= A^{1}_{xz} - A^{1}_{xyz} \\ A^{2}_{xyz} &= A^{1}_{xy} + A^{1}_{xz} - 2\, A^{1}_{xyz} \\ A^{3}_{xyz} &= A_{x} - A^{1}_{xy} - A^{1}_{xz} + A^{1}_{xyz} \\ A^{1}_{x:\overline{yz}} &= A^{1}_{xyz} + A^{2}_{xyz} \\ A_{\overline{xy}:z} &= A^{2}_{\underset{1}{xyz}} + A^{2}_{\underset{1}{xyz}} \end{aligned}\right. \tag{105}$$

A désignant la valeur actuelle du capital à payer en cas de mort dans les diverses hypothèses définies par les quantités Q correspondantes.

**41.** — La probabilité pour que $(x)$ et $(y)$ soient en vie à l'époque $t$ et que $(x)$ meure à une époque de l'intervalle $(t,\ t + dt)$ étant

$$-\frac{1}{l_x l_y}\, l_{y+t}\, d\, l_{x+t} = -\frac{1}{l_x l_y}\, l_{y+t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\, l_{x+t}\right) dt$$

la valeur actuelle d'un capital 1 payable au moment du décès de $(x)$ si $(x)$ meurt avant $(y)$ sera :

$$-\frac{1}{l_x l_y}\int_{0}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial t}\, l_{x+t}\right) l_{y+t}\, v^{t}\, dt = \overline{A}^{1}_{xy} \tag{106}$$

Mais on a :

$$l_x\, l_y\, \overline{a}_{xy} = \int_{0}^{\infty} l_{x+t}\, l_{y+t}\, v^{t}\, dt$$

$$l_y\, \frac{\partial}{\partial x}(l_x\, \overline{a}_{xy}) = \int_{0}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial x}\, l_{x+t}\right) l_{y+t}\, v^{t}\, dt =$$

$$= \int_{0}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial t}\, l_{x+t}\right) l_{y+t}\, v^{t}\, dt = -\, l_x\, l_y\, \overline{A}^{1}_{xy}$$

d'où :

$$\bar{A}^{1}_{xy} = -\frac{1}{l_x}\frac{\partial\,(l_x\,\bar{a}_{xy})}{\partial\,x} \tag{107}$$

et si on tient compte des relations

$$\frac{\partial}{\partial x}(l_x\,\bar{a}_{xy}) = \frac{dl_x}{dx}\,\bar{a}_{xy} + l_x\,\frac{\partial}{\partial x}\,a_{xy}$$

$$-\frac{dl_x}{dx}\,\frac{1}{l_x} = \mu_x$$

la formule (107) devient :

$$\bar{A}^{1}_{xy} = \mu_x\,\bar{a}_{xy} - \frac{\partial a_{xy}}{\partial x} \tag{108}$$

**42.** Remarquons que si l'on suppose :

$$\Delta^2 f(x_0) = \Delta^4 f(x_0) \ldots = 0$$

dans la formule de Newton

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x^0)}{1.h}\,\Delta f(x_0) + \ldots$$

$$+ \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_0 - \overline{n-1}\,h)}{h^n\,.\,n\,!}\,\Delta^n f(x_0).$$

on a :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta f(x_0)}{1\,.\,h} - \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2\,!\,h^2}\,(x - x_0 - 1)$$

d'où en faisant tendre $x$ vers $x_0$

$$f'(x) = \frac{\Delta f(x_0)}{1\,.\,h} - \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2\,!\,h}$$

ou bien, si $h$ est égal à 1

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left\{ f(x+1) - f(x-1) \right\}$$



D'après cela, si on suppose que $\bar{a}_{xy}$ est une fonction du second degré en $x$, on a :

$$\frac{\partial a_{xy}}{\partial x} = -\frac{1}{2}\left(\bar{a}_{x-1:y} - \bar{a}_{x+1:y}\right)$$

$$\bar{A}^{1}_{xy} = \mu_x\,\bar{a}_{xy} + \frac{1}{2}\left(\bar{a}_{x-1:y} - \bar{a}_{x+1:y}\right) \tag{109}$$

**43.** — Admettons l'hypothèse de Makeham, qui s'exprime par la relation

$$\mu_x = A + Bc^x$$

La probabilité ${}_tp_{xy}$ pour que $(x)$ et $(y)$ soient en vie à l'époque $t$ et la probabilité ${}_tp_x$ pour que $(x)$ soit en vie à la même époque sont respectivement :

$$e^{-2At - \frac{B}{\log c}(c^x + c^y)(c^t - 1)} = e^{2t\log s + (c^x + s^y)\log G}$$

$$e^{-At - \frac{B}{\log c}c^x(c^t - 1)} = e^{t\log s + c^x \log G}$$

avec :

$$-A = \log s,\ -\frac{B}{\log c} = \log g,\ g^{c^t - 1} = G$$

On en déduit :

$$\log {}_tp_{xy} = 2t\log s + (c^x + c^y)\log G$$

$$\log {}_tp_x = t\log s + c^x \log G$$

$$\frac{\log {}_tp_x - t\log s}{\log {}_tp_{xy} - 2t\log s} = \frac{1}{1 + c^{y-x}}$$

$$\log {}_tp_x = \frac{1}{1 + c^{y-x}}\log {}_tp_{xy} - t\log s\,\frac{1 - c^{y-x}}{1 + c^{y-x}}$$

$$\frac{1}{{}_tp_x}\,\frac{\partial\,{}_tp_x}{\partial t} = \frac{1}{1 + c^{y-x}}\,\frac{1}{{}_tp_{xy}}\cdot\frac{\partial\,{}_tp_{xy}}{\partial t} - \log s\,\frac{1 - c^{y-x}}{1 + c^{y-x}}$$

$${}_tp_y\,\partial_t\,p_x = \frac{1}{1 + c^{y-x}}\,\partial_t\,p_{xy} - \frac{1 - c^{y-x}}{1 + c^{y-x}}\log s.\ {}_tp_{xy}\,\partial t \tag{110}$$

Dans l'expression

$$-\frac{1}{l_x l_y}\int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial t} l_{x+t}\right) l_{y+t}\, v^t\, dt = -\int_0^\infty v^t\, {}_tp_x \left(\frac{\partial\, {}_tp_x}{\partial t}\right) dt$$

remplaçons ${}_tp_y d_t p_x$ par sa valeur tirée de (110). On a alors :

$$(111)\quad \begin{cases} \bar{A}^{\,1}_{xy} = -\dfrac{1}{1+c^{y-x}}\displaystyle\int_0^\infty v^t \frac{\partial\, {}_tp_{xy}}{\partial t}\, dt + \\ + \dfrac{1-c^{y-x}}{1+c^{y-x}} \log s \displaystyle\int_0^\infty v^t\, {}_tp_{xy}\, dt = \\ = \dfrac{1}{1+c^{y-x}}\, \bar{A}_{xy} + \dfrac{1-c^{y-x}}{1+c^{y-x}} \log s \,.\, \bar{a}_{xy} \end{cases}$$

**44.** — Si on admet au contraire l'hypothèse de Gompertz

$$\mu_x = Bc^x$$

on voit de suite que l'on a :

$$(112)\qquad \bar{A}^{\,1}_{xy} = \frac{1}{1+c^{y-x}}\, \bar{A}_{xy}$$

**45.** — On peut étendre immédiatement les formules (105) et (108) au cas de $m$ têtes $(x, y, \ldots (m)$ : il suffit en effet, en ce qui concerne la relation (111) de remplacer les $(m-1)$ têtes $(y, z, \ldots m)$ par une tête unique $(u)$ en posant :

$$c^y + c^z + \ldots = K_u$$

On a alors :

$$\log {}_tp_u = (m-1)\, t \log s + K_u \log G$$

et l'on obtient :

$$(113)\quad \begin{cases} \bar{A}^{\,1}_{xy\ldots(m)} = \dfrac{c^x}{c^x + K_u}\, \bar{A}_{xy\ldots(m)} - \\ - \dfrac{(m-1)\, K_u - c^x}{c^x + K_u} \log s\, \bar{a}_{xy\ldots(m)} \end{cases}$$



Il suffit de même de remplacer $\bar{a}_{xy}$ par $\bar{a}_{xy\ldots(m)}$ si on part de la formule (108) qui est indépendante de toute hypothèse concernant la forme de $l_x$ (sauf l'hypothèse que cette fonction est dérivable).

Ainsi les diverses formes d'assurances de survie peuvent s'exprimer à l'aide de relations ne contenant que $A^{\,1}_{xy}\ldots$, $\bar{A}^{\,1}_{xy}\ldots$ (outre les fonctions biométriques fondamentales $\mu_x$, ${}_np_x \ldots$). Ces dernières quantités et les autres quantités analogues peuvent toujours s'exprimer en fonction d'annuités cessant de fonctionner au premier décès $a_{xy}\ldots$, $\bar{a}_{xy}\ldots$ ou de capitaux payables en cas de mort $A_{xy}\ldots$, $\bar{A}_{xy}\ldots$, de sorte que les quantités que l'on doit considérer comme essentielles sont en définitive $a_{xy}\ldots$, $\bar{a}_{xy}\ldots$, $A_{xy}\ldots$, $\bar{A}_{xy}\ldots$, $A^{\,1}_{xy}\ldots$, $\bar{A}^{\,1}_{xy}\ldots$

---

# TROISIÈME PARTIE

## TECHNIQUE DES ASSURANCES SUR LA VIE

## CHAPITRE PREMIER

### PRIMES ET RÉSERVES

#### I. — Notion de prime. Primes pures et primes du tarif

**1.** — Une prime pure est la somme que l'assuré serait tenu de verser dans l'hypothèse où ce versement servirait seulement à faire face aux engagements pris à son égard par l'assureur, en admettant que les lois de mortalité et de capitalisation adoptées soient absolument conformes à la réalité. La détermination des primes pures se ramène dans tous les cas à la résolution de problèmes traités au chapitre précédent. Il s'agit en effet simplement de déterminer dans chaque cas le montant d'une somme ou d'un système de sommes dont la valeur probable soit égale à la valeur probable des engagements de l'assureur à l'égard de l'assuré.

**2.** — Nous appellerons *prime du tarif* ou *industrielle* ou *prime chargée* la prime payée effectivement par l'assuré, *chargement* la différence entre cette prime et la prime pure définie précédemment. Nous appellerons *fonds purs* ou *industriels* les capitaux constitués par l'accumulation des primes portant les mêmes noms.

L'introduction des chargements se justifie par plusieurs raisons : les frais que doit subir l'assureur (frais généraux de gestion pour chaque exercice ; dépenses inhérentes aux divers contrats ; commissions aux agents, etc.), les écarts possibles défavorables à l'assureur qu'il est bon de couvrir en constituant un fonds spécial de garantie — enfin, le caractère d'entreprise capitaliste de l'assurance, dont la fondation a en général pour but de donner des bénéfices à l'assureur.

**3.** — Nous nous proposons de voir entre quelles limites peut s'exercer le choix de l'assureur, dans la détermination des chargements (outre les limites fixées par la concurrence que se font mutuellement les diverses entreprises d'assurances).

La limite inférieure ne dépend que des frais que subit effectivement l'assureur. Quant à une limite supérieure, M. Bohlmann [1] introduit, pour la déterminer, la notion de prime maximum.

Examinons séparément les divers cas possibles pour une opération donnée et calculons la valeur de la prime nette correspondant à chacun de ces cas en supposant qu'il se produise exclusivement : la plus grande de ces valeurs est la prime maximum. Elle correspond au cas où l'opération d'assurance serait moins avantageuse qu'une opération de simple épargne et elle dépend des probabilités de survie et de décès.

Par exemple dans le cas d'une rente viagère unitaire contractée à l'âge $x$, elle est évidemment égale à

$$1 + v + \ldots + v^{\omega - x} = \frac{1 - v^{\omega - x + 1}}{1 - v} \quad (\omega = \text{âge extrême}).$$

Dans le cas d'une assurance unitaire en cas de mort, elle est égale à 1.

**4.** — M. Mounier, reprenant la théorie de l'espérance morale

[1] Bohlmann. — *Encyclop.*, 891.



de Bernoulli [1], détermine la valeur morale que présente une assurance pour l'assuré et prend comme chargement maximum celui qui rend cette valeur nulle. Cette valeur est, en première approximation, directement proportionnelle au risque moyen de l'opération [2] et inversement proportionnelle à la fortune de l'assuré. M. Bohlmann fait remarquer qu'il ne résulte pas de là qu'il soit juste de prendre d'autant plus d'argent à quelqu'un qu'il est moins riche [3], mais qu'il en résulte au contraire que le principe généralement admis d'après lequel la prime doit être indépendante de la fortune de l'assuré paraît très raisonnable même au point de vue de la théorie de Bernoulli puisque, suivant cette théorie, l'as-

[1] Soit $k$ une constante et $x$ la fortune d'une personne à une époque donnée, Bernoulli appelle la quantité

$$dy = k \frac{dx}{x} \tag{1}$$

la *valeur morale* d'un accroissement $dx$ de $x$ pour cette personne.

De l'équation (1) il résulte que l'expression :

$$k(\log b - \log a) \tag{2}$$

représente la valeur morale d'une variation finie $\overline{b - a}$ de la fortune de cette personne supposée égale à $a$ au début. Aux valeurs $b = a$, $b = a^2$, ... $b = a^n$ correspondent par suite les valeurs morales $o$, $\log a$, $2 \log a$ ... A des accroissements de la fortune variant en progression géométrique correspondent donc des accroissements de l'utilité ou de la valeur morale de la fortune qui varient en progression arithmétique, principe qu'on admet quelquefois, d'une façon plus générale pour l'intensité de la sensation (loi du logarithme ou loi de Fechner).

L'hypothèse d'après laquelle l'utilité $y = f(x)$ d'une richesse $x$ est une fonction décroissante de $x$ est d'une importance fondamentale dans les études économiques et il paraît bien difficile de ne pas l'admettre ; mais il n'y a peut-être aucune raison, en dehors de la raison de simplicité, pour choisir la fonction définie par (1) parmi les différentes formes possibles de la fonction $f$, en nombre théoriquement infini.

[2] Voir Chap. IV,

[3] C'est ce qui arriverait si pour les assurances de montant faible la prime était relativement plus grande que pour les assurances de montant fort.

Il n'en est rien et c'est ce qui permet de considérer seulement les primes de l'assurance unitaire, car les primes et les sommes assurées varient proportionnellement.

surance a d'autant plus de valeur pour l'assuré qu'il possède moins [1].

## II. — Primes uniques et primes périodiques. Primes de contre-assurance.

**5.** — Soit A la valeur probable, rapportée au début de l'opération, des engagements pris par l'assureur à l'égard d'un assuré unique $(x)$ ou d'un groupe d'assurés $(x, y, z\ldots)$, pour une opération déterminée. Désignons par

$$A' = A(1 + \alpha)$$

la somme que devraient verser $(x)$ ou $(x, y, z\ldots)$ au moment du contrat pour être libérés de tout versement ultérieur (*prime unique* de l'opération considérée. *La prime unique pure* correspond à $\alpha = 0$).

On peut supposer au contraire que $(x)$ ou $(x, y, z\ldots)$ s'engagent à faire une suite de versements de montant déterminé à des échéances déterminées (*primes périodiques*). D'après ce qui précède, la valeur probable de l'ensemble de ces versements, rapportée au début de l'opération, doit être égale à A ou à A′ suivant que les primes périodiques considérées sont des primes pures ou des primes chargées.

Dans la pratique le payement de la prime a lieu au début de chaque année à partir du moment du contrat (*primes annuelles*) jusqu'à ce que $(x)$ ou $(x, y, z\ldots)$ aient atteint un certain état, ou bien pendant $n$ années au plus à partir du début de l'opération jusqu'à ce qu'ils aient atteint un certain état, ou enfin jusqu'à l'échéance de l'opération.

Soient $P_m$ et $P'_m$ la prime pure et la prime du tarif qu'il faut

[1] Bohlmann, *loc. cit.*, p. 890-891 ; Mounier (*Archief voor de Verzeringswetenschap*, I, 1894).



payer après $m$ années à partir du début de l'opération, en supposant qu'à ce moment $(x)$ ou bien $(x, y, z\ldots)$ se trouvent dans un certain état, de probabilité $p_m$. On doit avoir, d'après ce qui précède :

$$(1) \qquad \sum_{m=0}^{m=n-1} P_m v^m p_m = A.$$

Si l'on pose

$$(2) \qquad \sum_{m=0}^{m=n-1} v^m p_m = \mathbf{a}$$

et si l'on suppose $P_m = P_{m+1} = P_{m+2} = P$, la relation précédente donne :

$$(3) \qquad P = \frac{A}{\mathbf{a}}.$$

C'est le montant de la prime annuelle constante qu'il faut payer pour une assurance de valeur A, le mode de payement des primes étant défini par **a**.

Dans le cas où les primes varient linéairement, on a encore une relation de la forme (3). Supposons

$$P_0 = P$$
$$P_m = P(1 \pm m\beta).$$

L'équation (1) donne alors :

$$P = \frac{A}{\sum\limits_{m=0}^{m=n-1} v^m p_m \pm \beta \sum\limits_{m=1}^{m=n-1} m v^m p_m} = \frac{A}{\mathbf{a}}$$

ou en posant :

$$\sum_{m=n}^{m=n-1} v^m p_m \pm \beta \sum_{m=1}^{m=n-1} m v^m p_m = \mathbf{a}.$$

A $\beta = 0$ correspond le cas de l'équation (3) et des primes constantes.

**6.** — Supposons maintenant qu'on ait fait une convention (dite *contre-assurance*) en vertu de laquelle l'assureur s'engage à rembourser les primes à l'assuré ou à ses héritiers au cas où l'éventualité à laquelle est subordonné le payement de l'assurance ne se produirait pas.

Nous nous proposons de chercher la valeur $\pi$ de la prime de contre-assurance superposée à l'ancienne prime.

Soit P la prime pure de l'assurance sans contre-assurance, $P_1$ la prime pure correspondant à la contre-assurance seule (assurance à capital constant égal à 1, dans le cas des primes uniques, et à capital croissant en progression arithmétique depuis 1 jusqu'à $n$, si $n$ exprime la durée temporaire des primes), $\alpha$ le chargement correspondant à une prime unité. On doit avoir :

$$P + P_1\pi(1 + \alpha) = \pi \tag{4}$$

si l'ancienne prime est une prime chargée et

$$P + P_1\pi = \pi$$

si c'est une prime pure.

Dans la pratique il s'agit de rembourser les primes réellement versées par l'assuré : c'est donc l'équation (4) qu'il faut employer.

$(1 + \alpha)P_1\pi$ est la prime de contre-assurance cherchée.

**7.** — Nous donnerons un seul exemple, celui de l'*assurance dotale*. Soit un groupe $(x, y)$. On suppose que l'assureur soit tenu de payer la somme 1 au bout de $n$ années, si $(x)$ atteint l'âge $x + n$ ; le groupe $(x, y)$ doit payer une prime annuelle constante au début de chaque année, jusqu'à ce que $(x)$ ait atteint l'âge $x + n - 1$ ou, au plus tard, jusqu'au décès de l'un des membres du groupe. On stipule en outre que toutes les primes payées devront être rendues au cas où $(x)$ mourrait avant d'avoir atteint l'âge $x + n$.



On a, dans le sens défini au n° 5 :

$$A = {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$\mathbf{a} = |_n\mathbf{a}_{xy} = \frac{N_{x-1:y-1} - N_{x+n-1:y+n-1}}{D_{xy}}$$

(2e partie, chap. II, formules (1-4-9-18))

$$P = |_nP_{xy} = \frac{A}{\mathbf{a}} = \frac{l_y D_{x+n}}{N_{x-1:y-1} - N_{x+n-1:y+n-1}}. \tag{5}$$

Pour calculer $P_1$, remarquons que si $(x)$ meurt au cours de la $t^e$ année d'assurance (à un âge de l'intervalle $x + t - 1$, $x + t$) l'assureur doit rembourser $1, 2, \ldots t$ primes suivant que $(y)$ a atteint les âges $y + 1, y + 2, \ldots y + t - 1$ : à ces diverses éventualités correspondent les probabilités

$$1,\ {}_1p_y,\ {}_2p_y \ldots,\ {}_{t-1}p_y.$$

Le produit

$$(1 + {}_1p_y + {}_2p_y + \ldots + {}_{t-1}p_y)\ {}_{t-1}|q_x$$

représente la valeur probable du payement de l'assureur à la fin de la $t^e$ année, en supposant que la prime totale annuelle soit égale à l'unité.

En introduisant le facteur d'escompte $v^t$ et en sommant par rapport à $t$, nous obtenons

$$\sum_{t=1}^{t=n} [v^t\ {}_{t-1}|q_x\ (1 + {}_1p_y + \ldots + {}_{t-1}p_y)]$$

comme expression de la prime nette unique de contre-assurance. Il lui correspond la prime annuelle :

$$\frac{1}{|_n\mathbf{a}_{xy}} \sum_{t=1}^{t=n} v^t\ {}_{t-1}|q_x(1 + {}_1p_y + {}_2p_y + \ldots\ {}_{t-1}p_y).$$

On a par suite, en se servant de l'équation (4) :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \pi &= \frac{\dfrac{l_y D_{x+n}}{N_{x-1:y-1} - N_{x+n-1:y+n-1}}}{1-(1+\alpha)\dfrac{D_{x,y}}{N_{x-1:y-1} - N_{x+n-1:y+n-1}} \displaystyle\sum_{t=1}^{t=n} \left[v^t\, {}_{t-1}|q_x(1+{}_1p_y+\dots{}_{t-1}p_y)\right]} = \\ &= \frac{D_{x+n}}{N_{x-1:y-1} - N_{x+n-1:y+n-1} - (1+\alpha)\displaystyle\sum_{t=1}^{t=n}\left[C_{x+t-1}(1+{}_1p_y+\dots{}_{t-1}p_y)\right]} \end{aligned}\right.$$

Posons en première approximation :

$$1 = {}_1p_y = \dots\dots = {}_{t-1}p_y.$$

La quantité $\Sigma$ du dénominateur devient

$$R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}$$

et l'expression (6) devient elle-même

$$(6^1)\quad \frac{D_{x+n}}{N_{x-1:y-1} - N_{x+n-1:y+n-1} - (1+\alpha)\{R_x - R_{x+n} - n.M_{x+n}\}}.$$

C'est une solution (par excès) du problème proposé d'autant moins exacte que $n$ et $y$ sont plus grands. On l'obtient en supposant que $(y)$ ne puisse pas mourir avant $(x)$.

Si au lieu de poser $\mathbf{a} = |_n\mathbf{a}_{xy}$, nous avions posé

$$\mathbf{a} = |_n\mathbf{a}_x\ ,$$

nous aurions obtenu au lieu de l'expression (6) :

$$(7)\quad \Pi = \frac{D_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+n-1} - (1+\alpha)\{R_x - R_{x+n} - n.M_{x+n}\}}$$

expression correspondant à l'hypothèse, bien plus simple que la précédente, où le payement des primes dépendrait seulement de la survie de $(x)$. La prime annuelle pure d'une pareille opération, sans



contre-assurance, serait

$$P = \frac{D_{x+n}}{D_x} \times \frac{1}{|_n\mathbf{a}_x} = \frac{D_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+n-1}}\ (^1).$$

### III. — Définition des réserves. — Réserves négatives.

**8.** — Toutes les fois que l'équation (3) est vérifiée, on a :

$$A - P\mathbf{a} = 0.$$

Supposons maintenant qu'il se soit écoulé $m$ années depuis le début de l'opération et soient $A_m$ et $P\mathbf{a}_m$ les valeurs probables des engagements de l'assureur et de l'assuré (ou du groupe assuré) pour la période de vigueur de l'opération qui reste encore à s'écouler. L'égalité :

$$(8)\qquad A_m - P\mathbf{a}_m = V_m$$

définit le montant $V_m$ de la *réserve* au moment considéré.

Soit $P\mathbf{a} = 0$. L'équation (8) devient :

$$(9)\qquad V_m = A_m.$$

La réserve coïncide donc avec la valeur probable actuelle des engagements de l'assureur toutes les fois que l'assuré n'a plus aucune prime à verser après la période $(o, m)$ de vigueur de l'opération. Dans le cas d'une prime unique, ceci se produit quel que soit $m$ (en supposant le versement initial effectué).

**9.** — On a nécessairement $A_m = V_m > 0$. Dans le cas des primes périodiques il peut arriver, au contraire, que l'on ait

$$(8^1)\qquad V_m < 0.$$

$V_m$ représente alors une créance de l'assureur envers l'assuré à

(1) Pour de plus amples détails sur les problèmes de contre-assurance (détails sans grande importance d'ailleurs) voir *Text-Book*, chap. XVI. Landré, *loc. cit.* §§ 171 à 178.

la fin de la $m^e$ année : c'est la perte que subirait l'assureur si l'assuré faisait abandon de l'assurance à ce moment, avant d'avoir payé de nouvelles primes. La possibilité d'une pareille perte conduit à exclure de l'assurance les formes ou les âges pouvant donner lieu à l'inégalité ($8^1$) pour certaines valeurs de $m$.

En général les réserves négatives ne peuvent pas se présenter pour les formes d'assurances d'individus isolés les plus répandues et pour les âges auxquels ces opérations ont lieu le plus souvent : en général, pour ces assurances, une prime constante est destinée à couvrir un risque qui va en croissant avec l'âge de l'individu. On pourrait, au contraire, faire en sorte que le risque aille en décroissant, ou bien en supposant que le capital assuré aille en décroissant (il suffirait alors de faire décroître les primes suivant la même loi), ou bien en établissant des primes qui aillent en croissant : les limites entre lesquelles il est correct, au point de vue technique, d'établir de pareilles primes doivent être fixées dans chaque cas particulier.

Dans le cas des groupes il n'est plus aussi simple de voir s'il peut ou non y avoir des réserves négatives.

Il peut y avoir une réserve négative par exemple dans le cas des rentes et des capitaux de survie si l'âge du contractant est inférieur à l'âge des bénéficiaires. Soit par exemple une rente ou un capital de survie constitué par $(y)$ en faveur de $(x)$ et soit $y < x$ : la réserve, positive au début, décroît graduellement parce que la diminution provenant du fait que la probabilité de décès de $(x)$ va en croissant l'emporte sur l'augmentation provenant du fait que la probabilité de décès de $(y)$ va en croissant ; la réserve peut même devenir négative : elle ne redevient alors positive que dans le cas où $(y)$ meurt avant $(x)$.

Plus généralement : si, au cours d'un certain exercice, un ou plusieurs membres du groupe viennent à mourir, il peut en résulter une discontinuité dans la façon dont varie la réserve pendant cet exercice : le risque de l'assureur se trouve alors subitement



augmenté ou diminué, car un décès peut conduire d'un certain type d'opération à un nouveau type auquel correspond une nouvelle réserve et auquel correspondrait une prime différente, si l'opération commençait à ce moment.

Ces augmentations et ces diminutions ne représentent nullement des profits ou des pertes réalisés par l'assureur : elles se produisent à mesure que l'état initial du groupe se modifie jusqu'au moment où les engagements de l'assureur commencent à s'accomplir ou cessent d'avoir lieu. Elles auraient lieu même dans l'hypothèse d'un groupe d'opérations qui se clôtureraient toutes par une égalité parfaite entre les versements de l'assureur et les versements des divers groupes assurés.

La réserve du groupe devient négative à la fin d'un certain exercice lorsque la diminution provenant des variations dans la composition de ce groupe dépasse en valeur absolue la réserve qu'on aurait eue si ces variations ne s'étaient pas produites : dans ce dernier cas les primes versées par les assurés auraient suffi à couvrir le risque de l'assureur, tandis qu'elles ne suffisent pas dans le cas contraire.

Pratiquement il est prudent de compter pour zéro, à l'inventaire, les réserves négatives : cela revient à considérer comme immédiate et certaine, au moment même où l'on calcule la réserve, la perte qu'aurait à subir l'assureur au cas où les assurés abandonneraient l'opération. Nous supposerons toujours dans la suite

$$V_m \geqslant 0.$$

### IV. — Constitution des réserves. — Primes de risque et primes d'épargne.

**10.** — Soit $\mathbf{a} = \mathbf{a}_x$, $A = A_x = 1 - d\mathbf{a}_x$. On a alors :

$$P = P_x = \frac{1}{\mathbf{a}_x} - d \tag{10}$$

$$V_m = {}_mV_x = 1 - d\mathbf{a}_{x+m} - \mathbf{a}_{x+m}\left(\frac{1}{\mathbf{a}_x} - d\right) = 1 - \frac{\mathbf{a}_{x+m}}{\mathbf{a}_x}. \tag{11}$$

On a ${}_mV_x > 0$ toutes les fois que l'on a : $\mathbf{a}_{x+m} < \mathbf{a}_x$. Lorsque cette dernière inégalité a lieu, on peut démontrer que l'on a aussi, pour les valeurs de $m'$ positives :

$$ {}_{m+m'}V_x > {}_mV_x. $$

L'équation (11) donne en effet :

$$ (1 - {}_mV_x)(1 - {}_mV_{x+m}) = \frac{\mathbf{a}_{x+m+m'}}{\mathbf{a}_{x+m}} \frac{\mathbf{a}_{x+m}}{\mathbf{a}_x} = 1 - {}_{m+m'}V_x $$

$$ (12) \qquad {}_mV_x = 1 - (1 - {}_1V_x)(1 - {}_1V_{x+1}) \ldots (1 - {}_1V_{x+m-1}) $$

et comme on a, par hypothèse, $0 < {}_mV < 1$, la proposition est démontrée.

Les équations (10) (11) et (12) et les remarques qui s'y rattachent s'appliquent toutes les fois qu'il est possible de mettre la prime annuelle P sous la forme :

$$ P = \frac{1}{\mathbf{a}} - d. $$

C'est le cas, par exemple, des assurances payables au premier décès d'un groupe $(x, y, z \ldots)$ ou des assurances mixtes (relatives à des individus ou à des groupes).

**11.** — Soit $P_m$ le montant de la prime périodique que l'assuré aurait à payer si, tous les autres éléments restant les mêmes, l'assurance était contractée au moment où l'on détermine la réserve.

En remplaçant $A_m$ par $P_m\mathbf{a}_m$ dans l'équation (8) on obtient :

$$ (13) \qquad V_m = (P_m - P)\mathbf{a}_m $$

$$ (14) \qquad = A_m \left(1 - \frac{P}{P_m}\right). $$

La réserve est positive ou négative suivant que

$$ P_m \lesseqgtr P. $$

Remarquons que l'expression (13) est susceptible d'une interprétation immédiate : elle montre que la réserve à un moment donné est égale à la valeur probable, rapportée à ce moment, de la somme que l'assuré (ou le groupe assuré) doit payer en moins (ou en plus si $V_m < 0$) de ce qu'il aurait à payer si l'opération commençait à ce moment (définition *prospective* de la réserve).



Mais de ce qu'on a au début

$$ m = 0 \quad P_m = P \quad V_m = 0, $$

il résulte que la somme que l'assuré aura à payer en moins (ou en plus) dans la période de vigueur de l'opération non encore écoulée doit se trouver compensée par un excédent (ou un déficit) dans les cotisations payées antérieurement, si l'on compare ces cotisations aux risques auxquels avait été soumis l'assureur dans cette période antérieure.

On peut donc concevoir aussi la réserve à un moment donné comme la différence entre les valeurs, rapportées à ce moment, des sommes versées par l'assureur et par l'assuré (ou par le groupe assuré) dans la période qui s'est écoulée depuis le début de l'opération (définition *rétrospective* de la réserve).

Les deux réserves (prospective et rétrospective) ne coïncident qu'autant que les hypothèses faites dans la détermination des primes sont bien d'accord avec la réalité [1].

**12.** — Soient maintenant $U_m$, $P_m$, $T_m$ des quantités positives ou nulles. Concevons, avec von Bortkievicz [2], une assurance (*assurance intégrale*) en vertu de laquelle l'assuré s'engage à payer au début de chaque année $m$ la somme $P_m$ et l'assureur s'engage à payer à la fin de la même année la somme $U_m$ si l'assuré est vivant et la somme $T_m$ si l'assuré est mort dans le courant de l'année.

Soient $q$ la probabilité pour que l'assuré meuve au cours de la

[1] Cf. Introduct., pages 5 et 6.

[2] *Risiko-Prämie und Sparprämie, etc...*, dans le « Ehrenzweig's Ass. Jahrbuch, XXIV ».

$m^e$ année, $p = 1 - q$, $V_m$ et $r = v^{-1}$ ayant leur signification habituelle. On doit avoir :

$$(V_{m-1} + P_m)\, r = (U_m + V_m)\, p + T_m q.$$

On en déduit

$$(15^1) \quad P_m = vq(T_m - U_m - V_m) + (vV_m - V_{m-1}) + vU_m$$
$$(15^2) = vp(U_m + V_m - T_m) + (vV_m - V_{m-1}) + v(T_m - V_m)$$

et la prime d'assurance peut être divisée en trois parties :

$$P'_m = vq(T_m - U_m - V_m) \quad \text{ou bien} \quad P'_m = vp(U_m + V_m - T_m);$$
$$P''_m = vV_m - V_{m-1};$$
$$P'''_m = vU_m \quad \text{ou bien} \quad P'''_m = v(T_m - V_m).$$

L'auteur appelle ces trois quantités prime de risque, prime d'épargne et prime résiduelle.

$$R_m = \pm(T_m - U_m - V_m)$$

représente la *valeur du risque*. On emploie l'équation $(15^1)$ ou l'équation $(15^2)$ suivant que $T_m - U_m - V_m$ est $> 0$ ou $< 0$ :

On a, en remarquant que $V_0 = 0$ ;

$$(16)\begin{cases} \displaystyle\sum_{s=1}^{s=m} P''_s r^{m-s+1} = \sum_{s=1}^{s=m} r^{m-s+1}(vV_s - V_{s-1}) = \\ = (vV_1 - V_0) r^m + (vV_2 - V_1) r^{m-1} + \ldots + (vV_m - V_{m-1}) r = V_m. \end{cases}$$

Ce sont les primes d'épargne qui, accumulées et capitalisées, constituent la réserve [1].

[1] Posons $p + q, = p'_m$, $q = p''_m$, $V_m = T_m = 1$.
Ce sont les quantités

$$\pi'_m = P'_m + P'''_m = v(p'_m - p''_m)$$
$$\pi''_m = P_m - \pi'_m = vV_m - V_{m-1} = P''_m$$

que M. Bohlmann (Encycl. p. 882) appelle prime de risque et prime d'épargne.
Au sujet des primes de risque, voir aussi : Landré, *op. cit.* pp. 298 et suiv. *Risiko-priäme* dans le *Zeitschrift für Versicherungsrecht und Wissenchaft* et dans *'Archief* hollandais, 5e partie.



On pourrait imaginer un assureur qui garderait chez lui les primes d'épargne servant à constituer les réserves et qui réassurerait les différences entre le capital assuré et ces réserves chez un autre assureur en payant $P'_m + P'''_m$.

La prime unique de réassurance correspondant à l'ensemble des primes $P'_m + P'''_m$ a été désignée par Wright sous le nom de *insurance value*.

Dans cas, les fonctions de l'assureur se réduiraient purement et simplement à celles d'une Caisse d'épargne. Dans la pratique, on pourrait limiter la réassurance à la somme $1 - V_m - M$, M étant la somme maxima que l'assureur assure directement.

Si l'on suppose un seul assuré $(x)$ et si on prend $T_m = 1$, $U_m = 0$, $m = 1, 2, \ldots$, on a :

$$P'_m = (vq_{x+m-1}(1 - {}_mV_x)$$

$vq_x$ s'appelle la *prime naturelle* correspondant à l'unité et à l'âge $x$. Ce n'est pas autre chose que la prime pure

$$\frac{C_x}{D_x}$$

d'une assurance unitaire mono-annuelle en cas de mort. On a, pour tous les âges $x$ pour lesquels $q_{x+1} > q_x$,

$$A_x = \frac{C_x}{D_x} + \frac{C_{x+1}}{D_{x+1}} + \ldots = vq_x + \frac{D_{x+1}}{D_x} vq_{x+1} + \ldots$$

et on voit aisément qu'il en résulte que l'on a :

$$P_x > vq_x,$$

pour les âges $x'$ compris entre l'âge $x$ et un certain âge $x + \sigma$ et

$$P_x < vq_x,$$

pour les âges $x'$ supérieurs à $x + \sigma$.

L'exactitude des inégalités précédentes est une condition suffisante pour qu'il ne puisse pas y avoir de réserves négatives.

## V. — Exemple de détermination rétrospective de la réserve

**13.** — Désignons par $\Pi_{x\overline{n}|}^{1}$ et par $(1+\alpha)\Pi_{x\overline{n}|}^{1}$ la prime pure annuelle et la prime du tarif correspondant à un capital unité différé de $n$ années, sur la tête $(x)$, avec contre-assurance. On a, en vertu de l'équation (7)

$$\pi_{x\overline{n}|}^{1} = \frac{D_{x+n}}{N_{x+1} - N_{x+n-1} - (1+\alpha)\{R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}\}}.$$

On a aussi, en posant :

$$(IA)_{x\overline{m}|}^{1} = \frac{R_x - R_{x+m} - mM_{x+m}}{D_x}$$

(2e partie, chap. II, formule 62)
les valeurs

$$\pi_{x\overline{n}|}^{1} \cdot {}_{|m}a_x \qquad \text{et} \qquad (1+\alpha)\Pi_{x\overline{n}|}^{1} \cdot (IA)_{x\overline{m}|}^{1}$$

comme expressions des valeurs probables, rapportées au début de l'opération, des engagements de l'assuré et de l'assureur pour les $m$ premières années de vigueur de l'opération.

Si on rapporte aussi la réserve ${}_mV_x$ au début de l'opération, on a :

$$\frac{D_{x+m}}{D_x}\,{}_mV_x = \pi_{x\overline{n}|}^{1}({}_{|m}a_x - (1+\alpha)(IA)_{x\overline{m}|}^{1}).$$

On trouve aisément en remplaçant $\pi_{x\overline{n}|}^{1}$, ${}_{|m}a_x$, $(IA)_{x\overline{m}|}^{1}$ par leurs valeurs en fonction des symboles de commutation :

$$(17)\quad {}_mV_x = \pi_{x\overline{n}|}^{1}\,\frac{N_{x-1} - N_{x+m-1} - (1+\alpha)\{R_x - R_{x+m} - m.M_{x+m}\}}{D_{x+m}} = \frac{\pi_{x\overline{n}|}^{1}}{\pi_{x\overline{m}|}^{1}}$$

A $\alpha = 0$ correspond la valeur de la réserve à la fin de la $m^e$ année lorsqu'on doit rembourser seulement les primes pures, en cas de décès de $(x)$ avant cette époque ; à $\alpha = -1$ correspond la



réserve du capital différé sans contre-assurance. Dans ce dernier cas l'expresion (17) devient :

$$(18)\qquad {}_mV_x = \frac{P_{x\overline{n}|}^{1}}{P_{x\overline{m}|}^{1}}$$

en posant :

$$P_{x\overline{n}|}^{1} = \frac{D_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+n-1}}.$$

## VI. — Groupement des polices — Méthode de récurrence pour la détermination des réserves

**14.** — Le calcul des réserves se fait généralement à la fin de chaque exercice, c'est-à-dire au 31 décembre. Les diverses opérations commencent au contraire à des moments quelconques de chaque exercice. Il en résulte que, sauf exception, la durée de l'opération au moment du calcul de la réserve n'est pas un nombre entier d'années.

Dans la pratique on évite de se servir des durées véritables des opérations et pour cela on admet, par hypothèse, que les diverses opérations se distribuent uniformément au cours de l'exercice. Ceci conduit ou bien à admettre que toutes les opérations commencées dans la $\overline{m-r}^{ème}$ période $(r = 0, 1, \ldots m-1)$ sont en vigueur depuis $r + \frac{1}{2}$ années au moment du calcul — ou bien à prendre comme durée de l'opération $r + 1$ années pour les opérations qui ont commencé dans le premier semestre et $r$ années pour celles qui ont commencé le second semestre.

Dans le premier cas la détermination de la réserve ${}_{m+\frac{1}{2}}V$ peut être effectuée avec une approximation suffisante en admettant que la première prime annuelle encaissée par l'assureur est différée de

une demie année et que l'on a :

$$A_{(m+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}\{A_{(m)} + A_{(m+1)}\}$$

$$\mathbf{a}_{(m+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}\{\mathbf{a}_{(m)} + \mathbf{a}_{(m+1)}\}$$

$$\frac{1}{2}|\mathbf{a}_{(m)} = \mathbf{a}_{(m)} - \frac{1}{2}.$$

On en déduit, en remplaçant dans

$$V_m = (A_{(m)} - P\tfrac{1}{2}\,\mathbf{a}|_{(m)})$$

$m$ par $m + \frac{1}{2}$ :

$$(18)\quad \begin{cases} V_{m+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(A_{(m)} - P\mathbf{a}_{(m)}) + \frac{1}{2}(A_{(m+1)} - P\mathbf{a}_{(m+1)} + \\ \qquad + \frac{1}{2}P = \frac{{}_{m+1}V + {}_mV}{2} + \frac{1}{2}P \end{cases}$$

**15.** — Supposons maintenant que pour chaque forme d'assurance on ait groupé les opérations dont on veut calculer la réserve en autant de classes qu'il y a d'âges représentés dans cette catégorie d'assurances ; s'il s'agit d'opérations temporaires, supposons qu'on ait formé autant de classes qu'il y a de couples de nombres exprimant le premier l'âge et le deuxième le nombre d'années qu'il reste à parcourir. On peut alors éviter de calculer la réserve séparément pour chaque opération. Au lieu de déterminer les réserves pour chaque opération de montant S et de prime P, on peut en effet calculer, pour chaque âge $x$ ou pour chaque couple de nombres $x$ et $r$ ($r$ désignant le temps non encore écoulé), les quantités suivantes :

$$(19)\qquad (A_{(x)} - P\mathbf{a}_{(x)})\Sigma S$$

$$(19^1)\qquad (A_{x\overline{r}|} - P\mathbf{a}_{x\overline{r}|})\Sigma S$$

en désignant par $\Sigma S$ le montant total de l'ensemble des capitaux de chaque classe.



**16.** — On peut aller plus loin et éviter même de classer les assurances d'après leur forme et leur durée de vigueur en se servant pour la détermination des réserves d'une méthode de récurrence basée sur une relation établie précédemment. Nous avons vu (IV, n° 12) qu'on a :

$$V_{m-1} + P_m = vp_{x+m-1}(U_m + V_m) + vq_{x+m-1}T_m$$

où $V_m$ désigne la réserve à la fin de la $m^{me}$ année.

On en déduit :

$$(20)\qquad {}_mV_x = \frac{{}_{m-1}V_x + P_m - vq_{x+m-1}T_m}{vp_{x+m-1}} - U_m$$

et, en réunissant toutes les opérations pour lesquelles l'âge des assurés est le même :

$$(21)\qquad \Sigma V_m = \frac{\Sigma V_{m-1} + \Sigma P_m - vq_{x+m-1}\Sigma T_m}{vp_{x+m-1}} - \Sigma U_m.$$

Le seul élément de classification pour l'équation (21) est l'âge : ni le nombre des années de vigueur et de durée de l'opération, ni la forme de l'opération n'interviennent dans le groupement des polices (en admettant naturellement que les bases du calcul soient communes à toutes les formes). Si on pose $U_m = 0$ dans l'équation (21), on a la formule de récurrence de M. Fouret [1].

Il faut noter que dans la pratique il est important de calculer séparément les réserves pour chaque forme d'assurance, car à ce calcul se rattache le calcul des écarts et des profits relatifs à chaque forme, élément qu'il est très important de connaître au point de vue théorique comme au point de vue pratique.

Il convient de remarquer, pour préciser le sens des notations introduites dans l'expression (21), que $\Sigma V_m$ et $\Sigma V_{m-1}$ ne représentent pas autre chose que le montant total des réserves à la fin et

[1] *Bulletin de l'Inst. des Act. Fr.* t T. I et IV. Pour la méthode de M, Fouret et en général pour l'application des méthodes de récurrence au calcul des réserves, voir : Poterin du Motel. — *Op. cit* pag. 283-292.

au commencement de la $m^e$ année : il ne faut donc pas considérer ces quantités comme représentant la somme des réserves correspondant à des opérations en vigueur pendant $m$ ou $m - 1$ années.

## VII. — Réserves des primes autres que les primes pures Primes et réserves de Zillmer.

**17.** — Posons, en général :

$$V'_m = A_m - P'\mathbf{a}_m \tag{22}$$

avec

$$P' \neq P = \frac{A_0}{\mathbf{a}_0}.$$

Les considérations qui conduisent à adopter l'équation (22) peuvent être d'ordre purement technrque : on peut, par exemple, être conduit à cette équation lorsqu'on veut passer de certaines bases de calcul à de nouvelles bases (sans que l'on veuille ou que l'on puisse modifier les primes fixées antérieurement). On y est aussi conduit lorsqu'on se sert de nouvelles tables de mortalité : en général, celles-ci présentent alors une élimination plus rapide que les anciennes tables à partir d'une certaine valeur de $m$.

Il peut arriver aussi que l'hypothèse $P' \neq P$ et surtout l'hypothèse $P' > P$ soient adoptées pour des raisons d'ordre financier, en particulier pour avoir des réserves aussi petites que possible, ce qui permet de réaliser de plus grands profits dans les premières années d'exercice. Nous nous proposons de voir entre quelles limites il est légitime d'employer ce procédé.

**18.** — La réserve relative à une prime lourde est celle qu'on obtient en posant

$$P' = (1 + \alpha) P$$



si $\alpha P$ est le chargement total ; la réserve relative aux *primes de réserve ou d'inventaire* est celle qu'on obtient en posant :

$$P' = (1 + \alpha_1) P$$

avec

$$\alpha_1 = \frac{k}{\mathbf{a}}$$

$k$ étant le montant des frais d'acquisition, non couverts par une taxe spéciale sur la police : cette prime $P'(1 + \alpha_1)$ destinée à couvrir et à amortir les frais d'acquisition s'appelle *prime de réserve* ou *prime d'inventaire*.

Le premier des deux procédés ainsi définis est d'autant moins légitime que le chargement de la prime est plus grand : en particulier il est peu correct lorsqu'il conduit à déterminer et à inscrire à l'inventaire des réserves négatives :

$$V'_m = \{ P_{(m)} - (1 + \alpha) P \} \mathbf{a}_{(m)} < 0.$$

Pour toutes les valeurs telles que $P_{(m)} < (1 + \alpha) P$, ce procédé conduit à disposer, pour couvrir les frais pendant les premières années, d'une somme plus forte que celle représentée par les primes et les risques à venir.

La possibilité pour l'assureur de faire face aux dépenses des exercices futurs est alors subordonnée à un accroissement progressif et ininterrompu du montant des nouveaux contrats, faute de quoi le montant des primes encaissées pourrait ne pas suffire à couvrir les dépenses.

On peut faire les mêmes remarques au sujet de l'emploi des primes de réserve, toutes les fois que $k$ a une valeur telle que l'on ait, quel que soit $m$ :

$$V'_m = \{ P_{(m)} - (1 + \alpha_1) P \} \mathbf{a}_{(m)} < 0.$$

Nous appellerons *limite maximum de Zillmer* pour les frais d'acquisition, la plus grande valeur $\chi$ de $k$ pour laquelle l'inégalité

$V'_m \geqslant 0$ est satisfaite, *prime de Zillmer* la quantité :

$$\pi \leqslant P + \frac{\chi}{\mathbf{a}} = P + \alpha'$$

$$\left(\text{en posant } \frac{\chi}{\mathbf{a}} = \alpha'\right),$$

*réserve de Zillmer* la quantité

(23) $$V'_m = A_{(m)} - \pi \mathbf{a}_{(m)}.$$

Pour les opérations à réserve croissante, ce qui est le cas normal pour les opérations en cas de mort, la condition de Zillmer est satisfaite pourvu que l'on ait :

$$A_1 - \pi \mathbf{a}_1 \geqslant 0$$

d'où

$$\pi = \frac{A_{(1)}}{\mathbf{a}_1} = P_{x+1}$$

$x$ désignant l'âge initial de l'assuré, et :

$$\alpha' = P_{x+1} - P_x$$
$$\chi = (P_{x+1} - P_x)\, \mathbf{a}_x.$$

$\alpha'$ représente la valeur maxima du chargement correspondant aux premières dépenses : réciproquement la valeur maxima de ces dernières s'obtient en formant la différence entre la prime de Zillmer et la prime de risque du premier exercice. Pour l'assurance en cas de mort, par exemple, elle est égale à :

(24) $$P_{x+1} - vq_x$$

ce qui s'explique en remarquant que, d'après ce qui précède, on ajoute le chargement $\alpha'$ à la partie de la prime qui aurait servi, sans ces premiers frais, à constituer la réserve à la fin du premier exercice et qu'on est obligé de dépenser (partie qui est égale à la différence entre la prime pure $P_x$ et la prime de risque). On a ainsi, pour l'assurance en cas de mort :

$$P_x - vQ_x + P_{x+1} - P_x$$

c'est-à-dire la quantité (24).



Le procédé que nous venons d'indiquer s'applique à tous les cas où l'on peut adopter sans objection la valeur de la réserve calculée à l'aide des primes pures : il a été l'objet de préoccupations qui n'étaient pas complètement justifiées et il a amené des polémiques dont on trouve surtout la trace dans les travaux allemands [1].

De toutes façons, il convient de ne pas exagérer la portée pratique de ce procédé : les limites qu'il assigne aux premières dépenses ne peuvent guère être respectées dans la réalité, surtout pour les âges faibles auxquels correspond une valeur particulièrement petite de l'expression (24), qui est au contraire très grande pour les âges plus avancés.

### VIII. — Attribution de la réserve à chaque assuré. Résiliation et réduction des opérations d'assurance

**19.** — Laissons de côté la question purement juridique du droit de propriété de l'assuré sur la réserve de l'opération contractée par lui et demandons-nous quelle partie de la réserve on peut attribuer à l'assuré dans le cas où celui-ci fait abandon total ou partiel de son assurance, sans qu'il y ait préjudice pour l'assureur.

On ne peut pas lui attribuer la totalité de la réserve : en effet, dans ce cas, on serait conduit à considérer l'opération d'assurance comme un pari dans lequel l'une des parties (l'assureur) serait liée par les conventions établies tandis que l'autre ne le serait pas. L'assuré serait donc conduit à demander la résiliation du contrat toutes les fois que, par suite d'une modification dans les risques, le maintien du contrat lui serait défavorable et serait avantageux pour l'assureur. Un tel pari ne peut pas se concevoir au point de

[1] Zillmer. — *Beiträge zur theorie der Prämienreserve*, Stettin (1863). Nous adoptons surtout ici l'exposition de Bohlmann, loc. cit., pages 881-92. Le procédé de Zillmer (en italien, *il Zillmeraggio*) n'est autorisé par la loi allemande qu'entre certaines limites.

vue technique, à moins que l'assureur ne reçoive un dédommagement pour la perte qui résulte du droit laissé ainsi à l'assuré.

Nous appellerons *anti-selection* le mode de sélection qui a pour effet de neutraliser l'action des variations du risque favorables à l'assureur. Il est évident que pour les assurances en cas de mort l'anti-sélection, tout en n'étant pas susceptible d'une évaluation rigoureuse, ne peut agir qu'entre des limites relativement restreintes : pour les opérations en cas de vie, elle aurait pour effet d'enlever à l'assurance à peu près tous les individus qui, à cause de leur état de santé, jugeraient le maintien de leur contrat nuisible à leurs intérêts. Le contraire ayant lieu pour l'ensemble des individus en bonne santé, il en résulterait que les seules opérations restant en vigueur seraient celles qui représenteraient une perte pour l'assureur.

**20.** — Les assureurs en ont conclu qu'il ne fallait accorder une compensation (*valeur de rachat*) à l'assuré qui veut résilier son contrat que s'il s'agit d'une opération en cas de mort [1].

Soit $(1 + \alpha_1)$ P la prime de réserve (§ VII, n° 18), $R_m$ la valeur de rachat. On doit avoir, d'après ce qui précède :

$$R_m < V_m - \alpha_1 P a_m.$$

On peut poser :

$$R_m = V_m - \alpha_2 P a_m$$

$\alpha_2$ étant un coefficient arbitraire supérieur à $\alpha_1$. Dans le cas où toutes les primes auraient été payées, on aurait

$$R_m = V_m.$$

On évite cet inconvénient en décidant que la valeur de rachat ne pourra, en aucun cas, être supérieure à une fraction déterminée de la réserve.

[1] De même pour les opérations mixtes ou les opérations avec contre-assurance, du moins pour la partie de ces assurances qui constitue une opération en cas de mort.



Le plus souvent le payement d'une valeur de rachat n'est admise qu'après le payement d'un certain nombre de primes (trois) et la valeur de rachat est fixée aux $\frac{3}{4}$ de la réserve. C'est là une règle empirique qui présente les avantages et les inconvénients propres à toutes les règles empiriques : le principal défaut consiste dans le groupement d'opérations présentant des réserves très différentes.

**21.** — Une résiliation seulement partielle du contrat est celle que l'on obtient par la *réduction de la police* : l'assuré est libéré du payement des primes ultérieures, mais il n'est plus assuré que pour une certaine valeur déterminée d'après la somme que l'assureur lui doit comme prime unique de la police réduite.

Le droit à la réduction est accordé aussi d'habitude aux assurés en cas de vie. Il s'agit là d'une concession qui a été démontrée possible par la pratique, mais qui se justifierait difficilement *a priori*.

Soit $A_m$ la prime unique unitaire correspondant à la police réduite,

$$V_m - \alpha_3 P a_m \qquad (\alpha_1 < \alpha_3 < \alpha_2)$$

la partie de la réserve attribuée à l'assuré en cas de réduction : le montant $W_m$ de l'assurance réduite est

$$W_m = \frac{V_m - \alpha_3 P a_m}{A_m}. \tag{26}$$

Dans le cas des opérations pour lesquelles la relation

$$\frac{1}{a} - d = P$$

est valable, à l'expression (26) correspond la nouvelle expression suivante

$$W'_m = 1 - (1 + \alpha_3)\frac{P}{P_m}. \tag{27}$$

Habituellement, on convient que le montant de la police réduite

doit être égal à la fraction $\frac{m}{n}$ du montant primitif, $m$ étant le nombre des primes déjà payées et $n$ le nombre total des primes.

Ici encore, on peut faire la remarque énoncée plus haut au sujet de la détermination par une règle unique des valeurs de rachat correspondant à des formes d'assurance très diverses.

---

# CHAPITRE II

—

## DES PROFITS

### I. — Comptes de profits et pertes

**1.** — Formons, pour une Compagnie donnée et pour un exercice déterminé, les différences suivantes :

*a*) La différence entre la somme des réserves existant au début de l'exercice, les primes encaissées pendant l'exercice, les intérêts produits par l'accumulation des capitaux, d'une part — et la somme des capitaux payés aux assurés en exécution des contrats, les frais généraux, les commissions payées aux agents, les réserves existant à la fin de l'exercice, d'autre part ;

*b*) La différence entre la somme des réserves existant au début de l'exercice, les primes pures encaissées pendant l'exercice, les intérêts produits par les capitaux assurés, d'une part — et la somme des capitaux payés aux assurés au cours de l'exercice et la réserve existant à la fin de l'exercice, d'autre part.

Nous appellerons le compte *a*) compte de profits et pertes général de la Compagnie pour la période considérée et le compte *b*) compte de profits et pertes des fonds nets.

Le solde du compte *a*) représente le bénéfice (ou la perte) provenant pour la Compagnie de la gestion industrielle prise dans son ensemble ; le solde du compte *b*) représente le bénéfice (ou la perte) provenant seulement des écarts entre les prévisions adoptées pour le calcul et la réalité (taux de l'intérêt et tables de survie).

Il est évident qu'une valeur positive de la différence $a$) peut correspondre à une valeur négative de $b$) et inversement.

**2.** — Le compte $a$) donne le bénéfice total (positif ou négatif) réalisé par la Compagnie pendant la période considérée. L'analyse des rubriques qu'il renferme nous conduit à décomposer ce bénéfice en plusieurs catégories, suivant la provenance des divers profits. C'est ainsi que nous pouvons distinguer :

$\alpha$) Un profit de mortalité ;

$\beta$) Un profit de capitalisation ;

$\gamma$) Un profit provenant de l'excès des chargements relatifs aux primes sur les frais réels de gestion ;

$\delta$) Un profit provenant de la différence entre les réserves et les sommes payées à l'assuré dans le cas de résiliation prématurée du contrat.

Enfin, comme élément influant sur le montant des profits, nous trouvons l'augmentation (ou la diminution) en cours d'exercice des fonds extraordinaires de réserve.

**3.** — L'établissement d'un compte exact de profits et pertes pour chaque exercice est d'une utilité pratique évidente.

Il fournit une vérification périodique de la valeur des éléments de calcul adoptés et il montre quelles modifications il convient d'apporter à la base même du calcul.

Mais il est évident d'ailleurs qu'un pareil compte ne diffère d'un compte industriel de profits et pertes que par l'introduction de la rubrique « réserves ».

Pour la répartition des bénéfices, en cas de participation des assurés aux bénéfices, on doit considérer les diverses causes de profit et le profit plus ou moins grand des diverses catégories d'assurances : mais il est souvent utile de tenir compte des profits tenant purement à la nature de l'exploitation (c'est-à-dire de $\alpha$) et de $\beta$)).

Ce sont ces derniers profits que nous allons étudier spécialement.



## II. — Du profit de mortalité

**4.** — Le profit de mortalité peut se déduire directement d'un compte de profits et pertes des fonds nets en faisant figurer dans les recettes non pas les intérêts réellement produits par la capitalisation, mais des intérêts conventionnels de calcul (*méthode des comptes de profits et pertes*).

Mais on peut aussi procéder comme il suit. Désignons par :

$a^0$, le montant des capitaux en cas de mort qu'on aurait eu à payer au cours de l'exercice si la mortalité réelle avait concordé d'une façon parfaite avec la mortalité prévue.

$a'$, le montant des capitaux en cas de mort effectivement payés ;

$b^0_1$, $b^0_2$, le montant des réserves des opérations en cas de mort (et en cas de vie) qui seraient devenues disponibles si la mortalité réelle avait été rigoureusement la même que la mortalité prévue ;

$b'_1$, $b'_2$, le montant des réserves des opérations en cas de mort (et en cas de vie) effectivement disponibles ;

$c^0$, le montant des capitaux en cas de vie dont aurait bénéficié l'assureur dans le cas d'une mortalité réelle coïncidant avec la mortalité prévue ;

$c'$, le montant des capitaux en cas de vie dont l'assureur bénéficie dans la réalité.

La différence $c = (a^0 - b^0_1) - (a' - b'_1)$ pour les opérations en cas de mort et la différence $c = (b'_2 + c') - (b^0_2 + c^0)$ pour les opérations en cas de vie constituent le profit de mortalité (*méthode statistique*) [1].

[1] Pour la critique des deux méthodes citées dans le texte, voir : G. Bohlmann. — *Berechnung des Sterblichkeitsgewinnes einer Lebensversicherungsgesellschafts*, dans les « Math. Stat. Abhandl. zur Lebensversicherung (Veröffentlichungen des D. V. für Versicherungswiss.), Berlin, 1904 ». Sur la détermination du profit de mortalité et du profit d'invalidité dans les assurances contre l'invalidité, voir : Radtke. — *Ermittelung des Invaliditäts am Sterblichkeitsvewinnes*, etc., *loc. cit.*

**5.** — Le principe d'où l'on tire la première méthode est évident de lui-même.

En ce qui concerne la deuxième méthode, remarquons que pour les opérations en cas de mort $a^0 - b^0{}_1$, et $a' - b'_1$ expriment respectivement le montant des capitaux assurés non couverts par les réserves correspondantes tel qu'il résulte de la table de mortalité et le montant des mêmes capitaux tel qu'il est dans la réalité : il est naturel de prendre la différence de ces deux montants comme expression du profit de mortalité.

Pour les opérations en cas de vie, soit $\sigma_x(\mathrm{R})$ la somme qu'il faudrait payer à la fin de l'année en cas de vie des assurés d'âge $x$ : la sommation

$$\Sigma q_x \sigma_x(\mathrm{R})$$

étant étendue à tous les âges, la quantité

$$c^0 = \Sigma q_x \sigma_x(\mathrm{R})$$

est le montant des capitaux en cas de vie échéant pendant l'exercice [1] et non payés, en supposant la loi de survie définie par

$$q_x,\ q_{x+1}, \ldots$$

et la quantité

$$c' = \Sigma q'_x \sigma_x(\mathrm{R})$$

est le montant des capitaux en cas de vie échéant pendant l'exercice [1] et non payés, si la loi de survie est définie par

$$q'_x,\ q'_{x+1}, \ldots$$

Si on pose

$$q'_x = q_x + \varepsilon_x$$

[1] Les échéances des diverses opérations ne coïncident pas toutes avec la fin de l'exercice. Si on suppose qu'elles se répartissent uniformément dans le cours de l'année, on peut supposer

$$2\sigma_x(\mathrm{R}) = \sigma'_x(\mathrm{R}) + \sigma''_x(\mathrm{R})$$

$\sigma'$ et $\sigma''$ désignant les montants des capitaux assurés au début et à la fin de l'exercice.



on voit de suite que l'on a :

$$c' - c^0 = \Sigma \varepsilon_x \sigma_x(\mathrm{R}) > 0$$

si $\varepsilon_x$ est $> 0$, condition qui n'est d'ailleurs pas nécessaire.

Un raisonnement analogue s'applique aux réserves : une augmentation de la mortalité chez les assurés en cas de vie détermine l'appropriation au profit de l'assureur d'un plus grand nombre de réserves devenues superflues par suite de l'annulation des opérations correspondantes. Soit $b'_2$ le montant des réserves ainsi réalisées dans la réalité et $b^0{}_2$ le montant des réserves qui auraient été réalisées avec une mortalité normale : la quantité

$$b'_2 - b^0{}_2$$

exprime le montant du profit de mortalité correspondant et par suite le profit de mortalité est dans l'ensemble :

$$(c' - c^0) + (b'_2 - b^0{}_2) = (c' + b'_2) - (c^0 + b^0{}_2) = \mathrm{C}'.$$

Nous avons vu que l'assurance intégrale (cf. 1re partie, § 4) pouvait être divisée en une prime de risque

$$\mathrm{P}'_m = vq\mathrm{R}_m \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{P}'_m = vp\mathrm{R}_m$$

(suivant que dans la formule $\mathrm{R}_m = \pm(\mathrm{T}_m - \mathrm{U}_m - \mathrm{V}_m)$ il faut prendre $+$ ou $-$ pour que $\mathrm{R}_m$ soit positif) et en une prime d'épargne indépendantes toutes deux de la probabilité de décès ou de survie : il en résulte que le profit de mortalité est proportionnel à la valeur du risque $\mathrm{R}_m$.

Pour une opération en cas de mort (ou pour une opération mixte, mais pour une année autre que l'année de l'échéance), on a :

$$\mathrm{R}_m = 1 - \mathrm{V}_m.$$

Le profit de mortalité est, toutes choses égales d'ailleurs, d'autant plus grand que la réserve est plus petite ; le profit de mortalité est donc minimum pour les opérations à prime unique et il est d'autant plus grand que le payement des primes a lieu moins rapidement.

C'est l'inverse qui a lieu pour les opérations en cas de vie. Pour ces opérations, on a :

$$R_m = V_m \text{ (1)}.$$

Le profit de mortalité est alors maximum pour les opérations à prime unique et il est d'autant plus petit que le payement des primes a lieu plus rapidement.

**6.** — On voit de suite que si l'on pose (en conservant les notations du paragraphe précédent) :

$$q'_x = q_x + \varepsilon$$
$$p'_x = p_x - \varepsilon$$

le profit de mortalité est

$$-\varepsilon(1 - V_m)$$

pour les opérations en cas de mort et

$$\varepsilon V_m$$

pour les opérations en cas de vie et que par suite la condition pour qu'il soit positif est

$$\varepsilon < 0$$

dans le premier cas et

$$\varepsilon > 0$$

dans le second cas.

Une mortalité supérieure à la mortalité prévue entraîne donc une perte pour l'assureur, s'il s'agit des opérations en cas de mort et un profit s'il s'agit des opérations en cas de vie, et inversement.

C'est là un résultat que l'observation la plus superficielle démontre évident.

(1) Sauf pour l'année de l'échéance pour laquelle on a :

$$V_m = 0, \; U_m = R_m.$$



**7.** — Mais une autre proposition beaucoup moins évidente et non moins remarquable résulte également du fait que pour les opérations en cas de mort le profit de mortalité varie en raison inverse de la réserve (ou en raison directe du capital réduit $1 - V_m$).

Soit un groupe choisi composé de $L_x$ individus d'un âge compris dans l'intervalle $(x, x + 1)$ et parmi lesquels il y en a :

$L_0$ qui se trouvent dans la première année d'assurance ;

$L_1$ dans la deuxième, etc.

Soit $q_0$ la probabilité annuelle de décès du premier groupe, $q_1$ celle du second groupe, ... ; par suite de la sélection, on a :

$$q_0 < q_1 < q_2 < \dots$$

La probabilité de décès du groupe total L s'exprime par :

$$q_x = q = \frac{L_0 q_0 + L_1 q_1 + L_2 q_2 + \dots}{L_0 + L_1 + L_2 + \dots},$$

On peut écrire par suite :

$$L_0(q - q_0) + L_1(q - q_1) + \dots = 0.$$

Désignons par $k$ la plus petite valeur de $n$ vérifiant l'inégalité

$$q_n > q$$

et posons, pour abréger :

$$L_n(q - q_n) = \alpha_n, \; -\alpha_n = \alpha'_n.$$

On a alors :

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1} = \alpha'_k + \alpha'_{k+1} + \dots$$

Mais si l'on introduit les capitaux réduits

$$R_0 = 1 - V_0, \quad R_1 = 1 - V_1, \quad R_2 = 1 - V_2, \dots$$

on a aussi

$$1 - V_0 > 1 - V_1 > 1 - V_2 > \dots$$

et par suite

$$\alpha_0 R_0 + \alpha_1 R_1 \dots + \alpha_{k-1} R_{k-1} > \alpha'_k R_k + \alpha'_{k+1} R_{k+1} + \dots$$

inégalité dans laquelle le premier membre exprime le profit de mortalité correspondant aux opérations en vigueur depuis moins de $k$ années et le second membre la perte correspondant aux opérations en vigueur depuis $k$ années ou plus de $k$ années. Le profit total

$$\alpha_0 R_0 + \alpha_1 R_1 + \ldots + \alpha_k R_k + \alpha_{k+1} R_{k+1} + \ldots$$

étant évidemment positif, on en conclut que, si le nombre des individus entrant dans l'assurance aux divers âges

$$x - n, \ldots x - k, \ldots x - 1, x$$

reste constant et si la probabilité de décès $q_x$ calculée pour l'âge $x$ coïncide avec la mortalité effective du groupe des assurés d'âge $x$, le profit de mortalité réalisé par l'assureur est nécessairement positif.

*A fortiori* l'assureur réalise un bénéfice, lorsque le nombre des individus entrant dans l'assurance va en croissant ; il subit au contraire une perte (du moins à partir d'un certain moment) lorsque le nombre des individus nouvellement entrés dans l'assurance décroît d'une façon suffisamment rapide ou se réduit à zéro.

### III. — Du profit de capitalisation

**8.** — On a un profit de capitalisation lorsque le taux obtenu par l'assureur dans le placement des réserves est supérieur au taux qui a servi de base au calcul des primes. On voit de suite que, en désignant par $i'$ le premier de ces deux taux et par $i$ le second, le profit de capitalisation est proportionnel à la différence $i' - i$.

En effet, si on désigne par $\Sigma V_{m-1}$ le montant des réserves existant au début de l'exercice considéré, le profit de capitalisation serait

$$(i' - i)\,\Sigma V_{m-1}$$

si le fonds $\Sigma V_{m-1}$ demeurait inaltéré jusqu'au moment où l'on détermine le profit, c'est-à-dire jusqu'à la fin de l'exercice. Il n'en



est pas ainsi, car la réserve $\Sigma V_{m-1}$ est destinée à couvrir aussi les risques échéant au cours de l'exercice considéré : si on désigne par $\Sigma V^0{}_{m-1}$, la partie de la réserve ainsi employée et si on suppose que les échéances de ces risques sont uniformément réparties au cours de l'exercice, on peut considérer

$$\Sigma V_{m-1} - \frac{1}{2}\Sigma V^0{}_{m-1}$$

comme étant la somme moyenne capitalisée pendant l'exercice et

$$(i' - i)(\Sigma V_{m-1} - \frac{1}{2}\Sigma V^0{}_{m-1})$$

comme le profit de capitalisation.

Mais il est évident d'autre part que le profit de capitalisation est égal au solde d'un compte de profits et pertes des fonds nets dans lequel le profit de mortalité n'entrerait pas en ligne de compte : il suffirait pour cela d'inscrire aux dépenses, non pas les capitaux réellement payés pendant l'exercice, mais les capitaux qu'on aurait payés si la mortalité réelle coïncidait parfaitement avec la mortalité présumée. Si l'on désigne par S le solde d'un pareil compte, l'équation :

$$S = (i' - i)(\Sigma V_{m-1} - \frac{1}{2}\Sigma V^0{}_{m-1})$$

peut servir à déterminer $i'$.

**9.** — Dans des conditions économiques normales, le taux de l'intérêt présente une tendance à décroître plus ou moins rapide, mais agissant presque constamment. D'autre part (dans le cas du moins des réserves positives) il faut, pour que les réserves soient suffisantes, que leur taux de capitalisation effectif soit au moins égal au taux qui a servi de base au calcul des prismes correspondant à ces réserves : il en résulte que l'assureur ne peut se passer de tenir compte de cette tendance de l'intérêt à décroître. Il peut le faire de deux façons :

*a*) en servant pour le calcul des primes et des réserves d'un taux

d'intérêt inférieur au taux qu'on peut considérer comme normal au moment du calcul.

*b*) en adoptant, dans le calcul des primes et des réserves, l'hypothèse d'un intérêt qui soit fonction décroissante (continue ou discontinue) du temps.

La première de ces deux méthodes est la seule employée dans la pratique : le choix d'un taux unique inférieur au taux normal serait d'ailleurs à conseiller, même dans l'hypothèse d'un intérêt constant avec le temps, afin d'éviter le risque de variations accidentelles (1)

**10.** — Indépendamment des profits et pertes de capitalisation proprement dits, les variations du taux de l'intérêt produisent une variation dans la valeur des biens producteurs d'intérêt et, par suite, dans la valeur du patrimoine qui constitue la réserve : il peut être utile de s'occuper aussi de cette variation.

Voici en effet ce qui arrive : la valeur, en tant que capital, des biens producteurs d'intérêt et le taux de la capitalisation variant en raison inverse l'un de l'autre, à des diminutions du taux correspondent des augmentations de la valeur du capital, augmentations d'autant plus grandes que le taux de l'intérêt est plus faible (2).

Ces augmentations doivent-elles être considérées comme purement nominales ou bien constituent-elles de véritables plus-values?

(1) En ce qui concerne *b*), voir dans le « Journal of the Inst. of Act. ». Hardy. — *Australian Mutual Provident Society*, vol. XXXI, pag. 325 ; G. H. R., *The effect of a decreasing rate of interest*, vol. XXXII, pag. 272, et dans les « Papers and Transact. of the Act. Soc. of Am. ». Fackler. — *Proper charges for Ammities and Insurances*, etc., vol. IV, pages 32, 68, 201. — Voir aussi les rapports du quatrième congrès des actuaires.

(2) D'une façon plus précise, l'amplitude des oscillations produites dans la valeur du capital par les variations du taux de l'intérêt est inversement proportionnelle au carré du taux, s'il s'agit de variations infinitésimales et au produit du nouveau taux par l'ancien, s'il s'agit de variations finies.



Dans la pratique, cette question, assez intéressante au point de vue économique et au point de vue de la comptabilité, est résolue de bien des façons différentes suivant la prudence plus ou moins grande de ceux qui se la posent.

Mais en ce qui concerne les réserves, il est essentiel de remarquer qu'elles doivent correspondre à des capitaux ayant une valeur déterminée à une époque future déterminée et que par suite on peut laisser de côté les variations éventuelles du taux de l'intérêt et le bénéfice qui en résulte : une augmentation dans la valeur de la réserve importe peu en effet quand cette augmentation a lieu parallèlement à une augmentation égale de la valeur escomptée des sommes futures que les réserves sont destinées à constituer.

### IV. — Participation des assurés aux bénéfices

**11.** — Le mode de participation des assurés aux bénéfices et la valeur de cette participation sont naturellement arbitraires.

L'étude des méthodes de participation employées dans la pratique ne peut donc avoir pour but que d'étudier les conséquences, pour chaque assuré, de l'adoption de telle règle de répartition de préférence à telle autre. D'une façon générale on peut observer que la participation des assurés aux bénéfices apparaît, dans les sociétés d'assurances mutuelles, comme une conséquence naturelle du principe sur lequel sont basées ces sociétés, principe d'après lequel le bénéfice est un supplément versé par l'assuré et qui doit lui être rendu : au contraire, dans les sociétés anonymes, le principe de la participation ne peut être que d'une application partielle, limitée le plus souvent aux formes d'assurances les plus rénumératrices (assurances en cas de mort) ou subordonnée au payement de la part de l'assuré d'une surprime spéciale (tarif avec participation aux bénéfices).

**12.** — La part de chaque assuré participant à la répartition des bénéfices peut être proportionnelle.

*a*) à la prime annuelle versée par l'assuré ;

*b*) à la somme assurée ;

*c*) au total des primes payées ;

*d*) au montant des primes capitalisées.

Il n'est évidemment pas indifférent d'adopter telle base plutôt que telle autre. Par exemple les modes de répartition *c*) ou *d*) conduisent à tenir compte de la durée de vigueur de l'opération ; on a vu que dans les opérations en cas de mort le profit résultant pour l'assuré (ou pour ses héritiers) de l'opération est d'autant plus grand que la durée de l'opération est plus petite et que ce profit peut même disparaître ou se transformer en perte, quand cette durée atteint ou dépasse une quantité qu'on peut calculer [1] : les modes de répartition *c*) et *d*) servent donc à dédommager en partie les assurés pour les lesquels l'assurance a été le moins favorable. Ces modes de répartition ont en outre pour but de favoriser les assurés plus anciens au détriment des assurés qui abandonnent l'assurance après une période relativement courte, en demandant le rachat de leur police.

Enfin la part de chaque assuré peut être proportionnelle ;

*e*) à diverses combinaisons des éléments énoncés plus haut.

**13.** — Le payement de la part de bénéfice qui revient à chaque assuré peut avoir lieu de plusieurs façons :

*a*) directement, par le payement effectif de cette part en numéraire ;

*b*) en portant cette part en diminution des primes que l'assuré a encore à payer ;

*c*) en considérant cette part comme la prime unique d'une opération complémentaire de même nature et de même échéance que l'opération primitive ;

*d*) en constituant, avec les bénéfices, des fonds spéciaux qu'on distribuera après une période d'accumulation donnée (en général de 5 à 20 ans) aux assurés dont les contrats seront encore en vigueur à cette époque,

Le dernier de ces systèmes permet de répartir des bénéfices souvent assez considérables : il permet en effet de restreindre le nombre des participants (les autres assurés perdant leurs droits soit par suite de décès prématuré, soit surtout par abandon des polices) et de capitaliser les bénéfices successivement accumulés.

Le nom de *répartition tontinière* donné à ce procédé provient d'une opération financière proposée par le banquier napolitain *Lorenzo Tonti*, opération que le gouvernement français a essayé à diverses reprises de réaliser [1].

La tontine consiste dans l'amortissement d'une dette initiale au moyen d'annuités constantes, à répartir d'année en année entre les créanciers survivants : le nombre de ceux-ci allant en décroissant au fur et à mesure, la part de chaque créancier augmente aussi graduellement jusqu'à atteindre, pour le dernier survivant, le montant total de l'annuité d'amortissement.

[1] Cf. 4e partie, 14.



[1] Essayée par Fouquet, à l'époque de Mazarin, la tontine ne put avoir lieu parce que le Parlement refusa d'enregistrer le décret. Des opérations tontinières eurent lieu en 1686, 1696, 1709 et furent répétées jusqu'à cinq fois pendant la période 1731-1759. — Le gouvernement anglais y eut aussi recours.

En substance la tontine n'était pas inconnue, antérieurement, de quelques cités italiennes et allemandes. Cf. Lehr. — *Tontinen* dans le « Handw. der Staatswissenchaften ».

# QUATRIÈME PARTIE

## THÉORIE DU RISQUE

### I. — Définitions et principes fondamentaux de la théorie du risque

**1.** — Soient $p_1, p_2, \ldots p_n$ les probabilités d'apparition de certains évènements (1), (2), ... ($n$) : supposons que l'apparition de ($i$) ($i = 1, 2, \ldots n$) entraîne l'obligation pour un joueur ($\alpha$) de payer la somme $A_i$ à un autre joueur ($\beta$) et l'obligation pour ($\beta$) de payer la somme $E_i$ à $\alpha$.

Si les évènements considérés s'excluent mutuellement et s'ils sont tels qu'un et un seul de ces évènements doive se produire, on a :

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i = 1$$

et nous avons défini dans ce cas les quantités :

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i A_i = A \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i E_i = E \tag{2}$$

comme étant les valeurs probables des espérances — autrement dit les espérances mathématiques — du premier et du second joueur.

Le jeu a été dit équitable si l'on a :

$$A - E = \sum_{i=1}^{i=n} p_i (A_i - E_i) = 0 \tag{3}$$

(ch. I, 1re partie, n° 8).

Séparons maintenant la somme

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i (A_i - E_i)$$

en deux autres sommes, la première étendue aux valeurs de $i$ pour lesquelles $A_i - E_i > 0$, la seconde aux valeurs de $i$ pour lesquelles $A_i - E_i < 0$.

Si l'équation (3)

$$\sum_{A_i > E_i} p_i(A_i - E_i) + \sum_{A_i < E_i} p_i(A_i - E_i) = 0$$

est vérifiée, on en déduit :

$$\sum_{A_i > E_i} p_i(A_i - E_i) = - \sum_{A_i < E_i} p_i (A_i - E_i)$$

Si on envisage les valeurs absolues $| A_i - E_i |$ des différences $A_i - E_i$ et si l'on pose

$$D = \sum_{A_i > E_i} p_i(A_i - E_i) = \sum_{A_i < E_i} p_i (E_i - A_i)$$

on a :

$$D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} p_i | A_i - E_i | \tag{4}$$

La quantité D définie par la formule (4) s'appelle le *risque mathématique* du jeu considéré. En même temps, les quantités

$$D_1 = \sum_{A_i > E_i} p_i (A_i - E_i) \tag{5}$$

$$D_2 = \sum_{E_i > A} p_i (E_i - A_i) \tag{6}$$



expriment la valeur des gains espérés respectivement par le premier joueur et par le second : nous appellerons la première *risque mathématique de* ($\alpha$) *par rapport à* ($\beta$) et la deuxième *risque mathématique de* ($\beta$) *par rapport à* ($\alpha$). Ces quantités coïncident avec D lorsque l'équation (3) est vérifiée.

**2.** — Nous dirons de même que le maximum de la différence $A_i - E_i$ est le *risque maximum du premier joueur par rapport au second* et que le maximum de la différence $E_i - A_i$ ($E_i > A_i$) est le *risque maximum du second joueur par rapport au premier*.

$$M = + \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} p_i (A_i - E_i)^2} \tag{7}$$

s'appellera *risque moyen* de l'opération considérée.

**3.** — Il est évident que, en supposant le jeu équitable,

$$D = \sum_{A_i > E_i} p_i (A_i - E_i)$$

peut être considéré comme la mise que ($\alpha$) devrait payer à un troisième joueur ($\gamma$), pour être indemnisé par ce dernier de la perte qu'il aurait à subir en cas d'apparition d'un des évènements ($i$) pour lesquels $A_i > E_i$. De même

$$D' = \sum_{A_i > E_i + D} p_i(A_i - E_i - D) \tag{8}$$

représente la mise que ($\gamma$) devrait payer à son tour à un quatrième joueur ($\delta$) pour être indemnisé par ce dernier de la perte qu'il aurait à subir en cas d'apparition d'un des évènements pour lesquels on a :

$$A_i > E_i + D.$$

Et ainsi de suite ; les risques D, D′, D″... sont appelés respectivement risques du premier, du second, du troisième... ordre.

Il est facile de démontrer que, si l'une au moins des différences $A_i - E_i$ est positive, les nombres D, D', ... déterminent une série infinie à termes positifs, convergente quel que soit le système, des quantités $p_1, p_2, \ldots$ et ayant pour somme le risque maximum de $\alpha$ par rapport à $\beta$.

La définition même des quantités D, D', D''... prouve qu'aucune de ces quantités ne peut être inférieure à zéro.

Il est au contraire nécessaire de démontrer que, en désignant par $D^{(r)}$ le terme général de la série, on ne peut jamais avoir pour aucune valeur finie de $r$

$$D^{(r)} = 0.$$

Il sera démontré que l'on a :

$$D > D' > D'' \ldots > \ldots > 0$$

si l'on prouve que, en supposant

$$D^{(r-1)} > 0 \tag{9}$$

il y a au moins une valeur de la différence $A_i - E_i$ pour laquelle l'inégalité

$$A_i - E_i - \left(D + D' + \ldots + D^{(r-1)}\right) > 0 \tag{10}$$

est satisfaite ou, en d'autres termes, si l'on prouve que l'hypothèse $D^{(r-1)} > 0$ entraîne nécessairement $D^{(r)} > 0$ (¹).

Posons, pour abréger $x_i = A_i - E_i$

$$S^{(r)} = D + D' + \ldots + D^{(r)}$$

et soit $x_\mu$ la plus grande des différences $x_i$.

Si dans l'expression

$$D^{(r-1)} = \sum_{x_i > S^{(r-2)}} p_i \left(x_i - S^{(r-2)}\right)$$

on remplace chacune des quantités $x_i$ qui figurent dans le second

(¹) Cette proposition contient implicitement la suivante :

$$D^{(r+1)} < D^{(r)} < D^{(r-1)}$$



membre par $x_\mu$ et si on remarque que $\sum_{A_i > E_i} p_i < 1$, on a évidemment :

$$D^{(r-1)} \leqslant \left(x_\mu - S^{(r-2)}\right) \sum_{x_i > S^{(r-2)}} p_i < x_\mu - S^{(r-2)}$$

$$x_\mu - S^{(r-2)} > D^{(r-1)}$$

d'où

$$x_\mu - S^{(r-2)} - D^{(r-1)} = x_\mu - S^{(r-1)} > 0$$

et l'inégalité (10) est bien vérifiée. Si on suppose qu'il existe d'autres valeurs $x_{\mu-1}, x_{\mu-2} \ldots$ de $x_i$ pour lesquelles l'inégalité (10) soit vérifiée, on aura évidemment :

$$\left.\begin{aligned} & p_\mu (x_\mu - S^{(r-1)} + p_{\mu-1} (x_{\mu-1} - S^{(r-1)}) + \ldots \\ & \quad = \sum_{x_i > S^{(r-1)}} p_i (x_i - S^{(r-1)}) = D^{(r)} > 0. \end{aligned}\right\} \tag{10¹}$$

Supposons maintenant que la série $D + D' + D'' + \ldots$ soit divergente ou bien qu'elle soit convergente, mais qu'elle ait une somme supérieure à $x_\mu$. Il serait alors possible de déterminer un nombre $k$ suffisamment grand pour que l'on eût

$$D + D' + D'' + \ldots + D^{(k)} > x_\mu$$

pour les valeurs $k = k, k + 1, \ldots$.

Il en résulterait

$$D^{(k+1)} = D^{(k+2} = \ldots = 0$$

contrairement à la proposition démontrée plus haut.

Mais la convergence de la série $D + D' + D'' + \ldots$ entraîne :

$$\lim_{r=\infty} D^{(r)} = 0.$$

On a alors, à cause de la relation (10)

$$x_\mu - S^{(\infty)} = 0$$

$$A_\mu - E_\mu = D + D' + D'' + \ldots \text{ in inf.} \tag{11}$$

et la proposition énoncée est démontrée.

Il n'y a pas lieu de s'occuper des valeurs $x_i$ telles que $x_i < x_\mu$ car pour ces valeurs on a :

$$x_i - S^{(\infty)} < 0 \text{ (1)}.$$

**4.** — Le problème qui se présente le plus souvent est beaucoup plus simple.

Soit $p$ la probabilité d'apparition d'un évènement quelconque. On peut supposer que des deux joueurs l'un ($\alpha$) tienne la banque : l'autre ($\beta$) doit verser dans tous les cas à ($\alpha$) la mise

$$E = pA \tag{11}$$

et, contre cette mise, ($\alpha$) lui promet le pavement de la somme A si l'évènement considéré se produit. Dans ce cas, le risque mathématique de ($\beta$) par rapport à ($\alpha$) est évidemment

$$D_1 = qE \quad (\text{en posant } q = 1 - p),$$

le risque mathématique de ($\alpha$) par rapport à ($\beta$) est

$$D_2 = p(A - E)$$

et l'on a, à cause de l'équation (11)

$$D_1 = D_2 = D.$$

On aura de même :

$$D' = q^2E,\ D'' = q^3E,\ D''' = q^4E, \ldots$$

$$D + D' + D'' + \ldots = E(q + q^2 + q^3 = \ldots) = E\frac{q}{p} = Aq \tag{12}$$

Mais $Aq = A - E$ est précisément le risque maximum de ($\alpha$) par rapport à ($\beta$).

La relation (12) n'est en effet qu'un cas particulier de la relation (10), démontrée précédemment. Elle correspond au cas où l'on a ;

$$n = 2,\ p_1 = p,\ A_1 = A(1 - p),\ E_1 = 0$$
$$p_2 = 1 - p,\ A_2 = E_2 = 0.$$

**5.** — Soit maintenant un évènement auquel corresponde pour ($\alpha$) une perte $x_i$ comprise dans les limites $x \pm \frac{dx}{2}$ : supposons que

(1) Le théorème énoncé dans ce paragraphe a été démontré pour la première fois par M. Bohlmann, *Mittheilungen des Verbandes der österr. und ung. Versicherungstechniker*, mai 1902.



la probabilité d'apparition de cet évènement soit $\varphi(x)dx$. Les sommes

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i = 0$$

deviennent alors les intégrales :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\,dx = 0$$

De même D et M se trouvent définis par les équations

$$\int_0^\infty x\varphi(x)\,dx = D \tag{13}$$

$$\int_0^\infty x^2\varphi(x)\,dx = M^2 \tag{14}$$

et enfin

$$\left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty (x - D)\,\varphi(x)\,dx = D' \\ &\int_{D+D'}^\infty (x - D - D')\,\varphi(x)\,dx = D'' \end{aligned}\right. \tag{15}$$

expriment les risques mathématiques de ($\alpha$) d'ordre supérieur au premier. Dans ce cas, on a encore, en employant les notations

du numéro précédent :

$$D^{(r-1)} = \int_{S^{(r-2)}} (x - S^{(r-2)})\, \varphi(x)\, dx$$

$$< (x_\mu - S^{(r-2)} \int_{S^{(r-2)}} \varphi(x)\, dx < x_\mu - S^{(r-2)}$$

$$x_\mu - S^{(r-2)} - D^{(r-1)} = x_\mu - S^{(r-1)} > 0$$

et

$$D^{(r)} > 0 \quad \text{si} \quad D^{(r-1)} > 0$$

$$\lim_{r=\infty} D^{(r)} = 0$$

$$\lim_{r=\infty} S^{(r)} = x_\mu$$

Un cas particulièrement intéressant est celui de la loi continue de probabilité définie par la fonction de Gauss :

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2h^2}$$

On trouve alors, en se servant de relations bien connues [1] :

$$D = \frac{1}{2h\sqrt{\pi}}$$

$$M = \frac{1}{h\sqrt{2}}$$

$$\frac{M}{D} = \sqrt{2\pi}. \tag{16}$$

**6.** — On se sert assez souvent de la relation (16) quand il s'agit de déterminer le risque mathématique d'un groupe d'opérations en se servant des risques des diverses opérations considérées séparément.

[1] Voir 1re partie, chap. I, § 5.



Connaissant les risques moyens unitaires.

$$M_1,\ M_2,\ M_3$$

des opérations (1), (2), (3), il est possible d'en déduire le risque moyen M du groupe formé par ces opérations : au contraire il n'est pas possible, sauf dans des cas spéciaux, de déduire des risques mathématiques unitaires $D_1$, $D_2$, $D_3$ ... des diverses opérations le risque mathématique D du groupe total.

Nous avons vu [1] que si on désigne par $m_1, m_2, m_3$... les erreurs moyennes commises sur $a$, $b$, $c$ ... et par $m$ l'erreur moyenne commise sur $a + b + c + \ldots$, on a la relation :

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + \ldots \tag{17}$$

Cette relation subsistera dans le cas actuel, à cause de l'identité des définitions relatives aux $m$ et aux M. Plus généralement, supposons que le montant de la première opération soit $s_1$, le montant de la deuxième $s_2$, et ainsi de suite et remarquons que, si C est une constante et si $m(\alpha)$ désigne l'erreur moyenne de $\alpha$, on a :

$$m(C\alpha) = Cm(\alpha)\ [2].$$

Si M représente encore le risque moyen relatif à l'ensemble des opérations, on aura alors :

$$M^2 = s_1^2M_1^2 + s_2^2M_2^2 + s_3^2M_3^2 + \ldots.. \tag{18}$$

Si on appelle D le risque mathématique du groupe d'opérations et si on se sert de l'équation (16) pour calculer ce risque, on aura :

$$D = \frac{1}{2\pi}\sqrt{s_1^2M_1^2 + s_2^2M_2^2 + \ldots..} \tag{19}$$

Ce calcul n'est évidemment légitime que dans un seul cas, celui où la loi des erreurs de Gauss peut servir à définir effectivement

[1] Idem, § 3.
[2] On a effet

$$(Ca^0) = \Sigma(a\varphi(a) = C\Sigma a\varphi(a) = Ca^0$$

$$\{m(Ca)\}^2 = \Sigma(Ca - Ca^0)^2\varphi(a) = C^2\Sigma(a - a^0)^2\varphi(a) = C^2\{m(a)\}^2$$

les probabilités dont nous nous occupons. Ceci a lieu lorsqu'on suppose qu'il y a un nombre infini d'opérations de même montant indépendantes les unes des autres : l'application de la formule (19) à des cas où le nombre des opérations est au contraire fini ne donne qu'une valeur approchée et l'approximation est d'autant plus faible que le nombre des opérations considérées est plus petit, sans qu'on puisse d'ailleurs fixer pour chaque cas une limite de l'erreur ainsi commise [1].

Les auteurs qui ont étudié la théorie du risque ont introduit tour à tour les deux quantités D et M : aucune de ces quantités ne permet de caractériser complètement les conditions d'un jeu donné, à l'exclusion de l'autre quantité, et dans le cas où elles ne diffèrent que par un facteur constant (cas où la loi de Gauss est valable), elles remplissent exactement le même objet l'une et l'autre : cependant grâce à la possibilité de déterminer, sans aucune condition, le risque moyen d'un groupe connaissant les risques moyens des diverses opérations formant le groupe, la théorie basée sur la considération du risque moyen présente un degré d'achèvement qu'il est impossible d'atteindre par une autre voie.

**7.** — Soient $\lambda$ joueurs différents jouant le même jeu et soit $s_1 = s_2 = \ldots = s_\lambda = 1$. La formule (18) nous donne :

$$M^2 = \lambda M_1^2.$$

Au contraire, si on désigne par $E_1$ la mise de chaque joueur et par E la mise totale, on a

$$E_1 = \lambda E$$

de sorte que, tandis que E croît en raison directe de $\lambda$, M croît seulement en raison directe de $\sqrt{\lambda}$.

Les deux relations précédentes donnent de même :

$$\frac{M}{E} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{M_1}{E_1}. \tag{20}$$

[1] Cf. Bohlmann. — *Lebensversicherungsmath.*, note 168.



On désigne $\frac{M}{E}$ sous le nom de *risque moyen relatif d'un groupe*, par opposition avec M qui est le *risque moyen absolu*. La relation (20) montre que le risque moyen relatif croît en raison inverse de la racine carrée du nombre des opérations semblables constituant le groupe considéré.

C'est à juste titre qu'on a considéré l'équation (20) comme exprimant le principe de l'assurance, sous sa forme la plus efficace. Non seulement cette équation montre la possibilité d'appliquer le procédé de l'assurance toutes les fois que l'on a affaire à un ensemble d'éléments pour lesquels à un changement d'état déterminé correspond une probabilité déterminée $p$, mais elle permet aussi de voir comment l'application d'un tel procédé est d'autant plus efficace que le nombre des éléments associés est plus grand et elle fournit une mesure du degré de certitude du procédé lui-même en fonction de son degré d'extension plus ou moins grand.

**8.** — Soient $\lambda$ joueurs différents auxquels on devra payer respectivement les sommes

$$s_1\ s_2 \ldots s_\lambda$$

si un évènement E, objet du jeu, a lieu.

Soit à trouver le système de rapports

$$\frac{s_2}{s_1} = a_2 \qquad \frac{s_0}{s_1} = a_2 \ldots \frac{s_\lambda}{s_1} = a_\lambda$$

rendant minimum le risque moyen relatif

$$\frac{M}{s_1 + s_2 \ldots + s_\lambda} = \frac{M_1 \sqrt{s_1^2 + s_2^2 \ldots + s_\lambda^2}}{s_1 + s_2 \ldots + s_\lambda}$$

et rendant par suite minimum le risque moyen absolu M, si l'on suppose $s_1 + s_2 \ldots + s_\lambda$ constant.

$M_1$ étant indépendant du montant de $s_1$, le problème se ramène au suivant : rendre minimum

$$\frac{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_\lambda^2}}{s_1 + s_2 + \ldots s_\lambda} = \frac{\sqrt{1 + a_2^2 + \ldots + a_\lambda^2}}{1 + a_2 + \ldots + a_\lambda}.$$

Si l'on pose :

$$\varphi = \frac{1 + a_2^2 + \ldots + a_\lambda^2}{\left(1 + a^2_2 + \ldots + a_\lambda\right)^2}$$

on doit avoir $\varphi =$ minimum
d'où

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3 \ldots \lambda) \tag{21}$$

Le système des équations (21) se ramène au suivant :

$$\begin{gathered} a_2 + a_2^2 + \ldots a_\lambda a_2 - a_2^2 - a_3^2 \ldots - a_\lambda^2 = 1 \\ a_3 + a_2 a_3 + a_3^2 \ldots + a_\lambda a_3 - a_2^2 - a_3^2 \ldots - a_\lambda^2 = 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_\lambda + a_\lambda a_2 + a_\lambda a_3 + \ldots + a_\lambda^2 - a_2^2 - \ldots - a_\lambda^2 = 1 \end{gathered}$$

qui admet la solution

$$a_2 = a_3 = \ldots = a_\lambda = 1.$$

Le risque moyen relatif et le risque absolu sont donc minimum, toutes choses égales d'ailleurs, lorsque les parts des divers joueurs dans le jeu sont égales.

**9.** — Etant donné un groupe d'assurés dont les assurances sont identiques dans tous leurs éléments, l'adjonction à ce groupe d'un nouveau groupe d'assurés a pour effet de diminuer le risque relatif, si le montant de chacune des nouvelles assurances coïncide avec le montant des assurances primitives. Si au contraire le montant des nouvelles assurances est supérieur à celui des assurances précédentes, le risque relatif pourrra augmenter ou diminuer, suivant que l'influence de l'augmentation du montant de chaque nouvelle assurance l'emporte sur l'influence de l'augmentation du nombre des assurances ou inversement.



Les problèmes qui se posent à ce sujet peuvent se ramener au type suivant. Soit un groupe de $\lambda$ assurances semblables de montant égal à l'unité et un groupe de $\lambda_1$ assurances de montant $s$ ($s \neq 1$ et $> 0$) semblables aux précédentes : on demande de déterminer $s$ (ou $\lambda$) en supposant donné $\lambda_1$ (ou $s$) de façon que le risque moyen relatif du groupe $(\lambda + \lambda_1)$ coïncide avec le risque moyen relatif du groupe primitif $(\lambda)$ ou soit à ce risque dans un rapport donné. On voit immédiatement que, si l'on désigne par C le rapport du risque relatif du groupe $(\lambda)$ au risque du groupe $(\lambda + \lambda_1)$, l'équation du problème est :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = C \frac{\sqrt{\lambda + \lambda_1 s^2}}{\lambda + \lambda_1 s}.$$

On peut encore poser le problème d'une façon plus générale en supposant que le groupe primitif comprenne $\lambda$ individus assurés pour des sommes différentes $s_1, s_2, \ldots s_\lambda$ et que le nouveau groupe qui vient s'adjoindre au précédent comprenne $\lambda_1$ individus assurés pour les sommes $s'_1, s'_2, \ldots s'_{\lambda_1}$, les autres éléments de l'assurance restant les mêmes : on demande alors quelles conditions doivent remplir les $s$ pour que le risque moyen relatif du groupe $(\lambda + \lambda_1)$ coïncide avec le risque moyen relatif du groupe $(\lambda)$ ou soit dans un rapport donné avec ce risque.

On trouve, par exemple [1], que si l'on pose :

$$\lambda s = s_1 + s_2 \ldots + s_\lambda, \qquad \lambda_1 s' = s'_1 + s'_2 \ldots + s'_{\lambda_1}$$
$$\lambda t^2 = s_1^2 + s_2^2 \ldots + s_\lambda^2, \qquad \lambda_1 t'^2 = s'^2_1 + s'^2_2 \ldots + s'^2_{\lambda_1}$$

l'inégalité

$$\lambda \left(\frac{s\, t'^2}{s'\, t^2} + 2\right) \leqslant \lambda_1 \frac{s'}{s} \tag{22}$$

[1] Hausdorff. — *Das Risiko bei Zufallspielen* dans les « Berichte der math. phys. kl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, nov. 1897. page 511.

exprime la condition pour que le risque relatif de $(\lambda + \lambda_1)$ ne dépasse pas le risque de $\lambda$.

Si on suppose

$$s = s_1 = s_2 \ldots = s_\lambda = 1, \qquad s' = s'_1 = s'_2 = \ldots = s'_{\lambda_1},$$

la condition (22) devient la suivante :

$$\lambda \left(1 - \frac{2}{s'}\right) \leqslant \lambda_1.$$

Cette condition est évidemment satisfaite, quel que soit $\lambda_1$, si l'on a $s' = 2$ : ce n'est que pour des valeurs de $s'$ supérieures à 2 qu'il y a lieu de chercher une limite inférieure de $\lambda_1$. On voit, d'une façon analogue, que la condition (22) est satisfaite quel que soit $\lambda_1$, si l'on a :

$$s' t'^2 \leqslant 2 s' t^2, \qquad \frac{t'^2}{s'} \leqslant 2 \frac{t^2}{s}$$

## II. — Notion de risque dans le cas particulier des assurances sur la vie

**10.** — Pour une compagnie d'assurances, on peut particulariser la notion générale de risque soit d'une façon immédiate, soit en appelant risque de la compagnie la somme des risques des diverses opérations contractées par cette compagnie et en vigueur à un instant déterminé.

M. Bohlmann part d'un ensemble d'opérations $\Gamma$ en vigueur à un moment déterminé $t$, qu'il suppose coïncider avec la fin d'un exercice. Il suppose 1°) que les hypothèses relatives à la mortalité et à la loi de capitalisation coïncident avec la réalité ; 2°) que les divers risques dont se compose $\Gamma$ sont indépendants les uns des autres (ce qui suppose qu'on a réuni, s'il y a lieu, en une opération unique les diverses opérations contractées par un même assuré) ; 3°) que le payement des capitaux en cas de mort a lieu à



la fin de l'exercice au cours duquel s'est produit le décès. Il introduit alors la notion de *groupement des décès futurs* : pour obtenir un pareil groupement il faut assigner pour chaque assuré l'exercice au cours duquel devra avoir lieu le décès. Le nombre $\mu$ des groupements logiquement possibles est fini : on peut donc les ranger d'après un procédé arbitraire choisi une fois pour toutes et les numéroter.

Considérons maintenant une période quelconque $(t_1, t_2)$ (l'instant $t_2$ étant postérieur à l'instant $t_1$) : nous considérerons comme dépenses A, pour cette période, le montant des payements de sommes assurées qui doivent avoir lieu au cours de la période et le montant des réserves à la fin de la période ; nous considérerons comme recettes E les primes nettes encaissées au cours de la période et les réserves existant au moment $t$ (A et E désignent les valeurs de ces dépenses et de ces recettes *escomptées* à l'instant $t$). Il est évident qu'à tout groupement $n$ des décès futurs correspondront aussi une valeur $A_n$ de A et une valeur $E_n$ de E.

Si $q_n$ désigne la probabilité pour que le groupement des décès futurs soit le groupement $n$, les expressions :

$$D_1 = \sum_{A_n > E_n} q_n (A_n - E_n)$$

$$D_2 = \sum_{E_n > A_n} q_n (E_n - A_n)$$

sont respectivement *le risque mathématique de la compagnie d'assurances à l'égard de* $\Gamma$ et *le risque mathématique de* $\Gamma$ *à l'égard de la compagnie* ;

$$M^2 = \sum_{n=1}^{n=n} q_n (A_n - E_n)^2$$

est le carré du *risque moyen M de l'ensemble* $\Gamma$ ; de même $A_n - E_n$ et les valeurs maxima de $A_n - E_n$ et de $E_n - A_n$ définissent respectivement le profit (positif ou négatif) dérivant du mode de grou-

pement $n$ et le *risqne maximum de la compagnie à l'égard de* $\Gamma$ ou *de* $\Gamma$ *à l'égard de la compagnie*.

Si on prend pour $\Gamma$ une opération unique, on a *le risque d'une opération pendant la période* $(t_1, t_2)$.

D'une façon plus précise : 1° l'hypothèse $t \equiv t_2$, $t$ étant l'instant initial de l'opération et $t_2$ coïncidant avec l'instant final de l'opération (ou, ce qni revient au même, $t_2 = \infty$), donne *le risque de l'opération* (¹) ;

2° $t \equiv t_1 = m$, $m$ étant le nombre des années de vigueur de l'opération au moment de la détermination du risque, $t_2 = \infty$, donne le *risque de l'opération pour la période de vigueur résiduelle ;*

3° $t \equiv t_1$, $t_2 = t_1 + 1$ donne *le risque de l'opération pour l'exercice suivant* ;

4° $t_1 = t_1$, $t_2 = t_1 + 1$ donne *le risque d'un exercice* (appelé d'habitude *risque annuel*).

### III. — Risque mathématique d'une rente viagère et d'un capital en cas de mort

**11**. — Dans le cas d'une rente viagère unitaire anticipée payable à l'âge $x$, les payements possibles de l'assureur, rapportés au début de l'opération, ont les valeurs

$$1,\ 1 + v,\ 1 + v + v^2,\ \ldots,\ 1 + v + v^2 + \ldots + v^{\omega - x - 1}$$

selon que l'assuré meurt au cours de la première année, de la deuxième année, ... ou qu'il ne meurt qu'à l'âge extrême $\omega$, que nous considérons comme physiquement impossible de dépasser.

(¹) Dans ce cas, si le principe de l'équivalence des engagements de l'assuré et de l'assureur s'applique, on aura :

$$D_1 = D_2 = \sum_{n=1}^{n=n} q_n (A_n - E_n) = D.$$



Posons d'une façon générale :

$$1 + v + \ldots + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{d} = \mathbf{a}_{\overline{n}|}$$

La différence $\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_{\overline{n}|}$ représente le profit ou la perte (suivant que l'on a $\mathbf{a}_{\overline{n}|} < \mathbf{a}_x$ ou $\mathbf{a}_{\overline{n}|} > \mathbf{a}_x$) résultant pour l'assureur du décès de l'assuré $(x)$ au cours de la $n^e$ année de vigueur de l'opération.

Si l'on désigne par ${}_{n-1|}q_x$ la probabilité pour que $(x)$ meure à un âge de l'intervalle $(x + n - 1,\ x + n)$, la quantité

$$(23)\quad \left\{ \begin{aligned} D(\mathbf{a}_x) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=\omega - x} {}_{n-1|}q_x \left| \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_{\overline{n}|} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} {}_{n-1|}q_x \left| \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_{\overline{n}|} \right| \end{aligned} \right.$$

représentera le risque mathématique de l'opération considérée pour le cas où les engagements de l'assureur et de l'assuré sont égaux.

On voit immédiatement que la formule (23) s'applique aux rentes payables par termes échus aussi bien qu'aux rentes payables par anticipation : la valeur de la rente viagère unitaire échue est en effet

$$a_x = \mathbf{a}_x - 1$$

et la valeur des payements de l'assureur dans le cas des rentes échues devient de même

$$\mathbf{a}_{\overline{n}|} - 1$$

en supposant que l'assuré meure au cours de la $n^e$ année de vigueur de l'opération.

Supposons maintenant qu'on veuille calculer le risque mathématique $D_{(m)}(\mathbf{a}_x)$, après qu'il s'est écoulé $m$ années depuis le début de l'opération.

A ce moment, le montant des réserves est $\mathbf{a}_{x+m}$, les payements ultérieurs de l'assureur peuvent avoir les valeurs

$$\mathbf{a}_{\overline{1}|},\ \mathbf{a}_{\overline{2}|},\ \ldots\ \mathbf{a}_{\overline{\omega-x-m}|}$$

et, la probabilité de décès à un âge de l'intervalle $(x+m+n-1,\ x+m+n)$ étant désignée par ${}_{n-1|}q_{x+m}$, on peut évidemment écrire :

$$\mathrm{D}_{(m)}(\mathbf{a}_x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\omega-x-m} {}_{n-1|}q_{x+m}|\mathbf{a}_{x+m} - \mathbf{a}_{\overline{n}|}|$$

d'où

$$\mathrm{D}_{(m)}(\mathbf{a}_x) = \mathrm{D}(\mathbf{a}_{x+m}). \tag{24}$$

**12.** — Considérons maintenant une assurance unitaire en cas de mort $\mathrm{A}_x$, contractée à l'âge $x$ : la valeur des payements possibles de l'assureur s'exprime par $v, v^2, \ldots v^{\omega-x}$ suivant que l'assureur meurt pendant la première année, la deuxième année ... de vigueur de l'opération ou qu'il atteint l'âge extrême $\omega$ : le risque mathématique $\mathrm{D}(\mathrm{A}_x)$ est donc défini par la formule :

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{D}(\mathrm{A}_x) &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\omega-n} {}_{n-1}|q_x|\mathrm{A}_x - v^n| = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n-1}^{n=\infty} {}_{n-1}|q_x|\mathrm{A}_x - v^n| \end{aligned}\right. \tag{25}$$

et le risque mathématique $\mathrm{D}_{(m)}(\mathrm{A}_x)$ rapporté au début de la $(m+1)^e$ année de vigueur de l'opération est de même :

$$\mathrm{D}_{(m)}(\mathrm{A}_x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} {}_{n-1}|q_{x+m}|\mathrm{A}_{x+m} - v^n| \tag{26}$$

d'où

$$\mathrm{D}_{(m)}(\mathrm{A}_x) = \mathrm{D}(\mathrm{A}_{x+m}). \tag{27}$$



**13.** — Au contraire, si on désigne par $\mathrm{D}(\mathrm{P}_x)$ le risque mathé-mathématique d'une assurance en cas de mort à prime annuelle constante $\mathrm{P}_x$ au début de l'opération et par $\mathrm{D}_{(m)}(\mathrm{P}_x)$ le risque de la même assurance après $m$ années, on aura :

$$\mathrm{D}_{(m)}(\mathrm{P}_x) < \mathrm{D}(\mathrm{P}_{x+m}).$$

La valeur de $\mathrm{D}(\mathrm{P}_x)$ est la suivante :

$$\mathrm{D}(\mathrm{P}_x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} {}_{n-1}|q_x|\mathbf{a}_{\overline{n}|}\mathrm{P}_x - v^n| \tag{28}$$

En effet $\mathrm{P}_x\mathbf{a}_{\overline{n}|}$ est la valeur, rapportée au début de l'opération, des $n$ primes de montant $\mathrm{P}_x$ payées par l'assuré au début de la première, de la deuxième ..., de la $n^e$ année de vigueur de l'opération : $v^n$ est la valeur, rapportée au même moment, du payement que l'assureur devra effectuer si le décès a lieu au cours de la $n^e$ année.

Après qu'il s'est écoulé $m$ années sans que le décès de l'assuré ait eu lieu, on a d'une part comme recettes de l'assureur la réserve ${}_m\mathrm{V}_x$ constituée pendant les $m$ premières années et la valeur des primes éventuelles futures et d'autre part $v^n$ comme dépenses de l'assureur, rapportées au début de la $\overline{m+1}^e$ période de vigueur de l'opération et dans l'hypothèse où $x$ mourrait à un âge de l'intervalle $(x+m+n-1,\ x+m+n)$.

On en déduit :

$$\mathrm{D}_{(m)}(\mathrm{P}_x) = \sum_{n=1}^{\infty=n} {}_{n-1}|q_{x+m}|{}_m\mathrm{V}_x + \mathbf{a}_{\overline{n}|}\mathrm{P}_x - v^n| \tag{29}$$

Si, dans cette formule, on effectue les substitutions suivantes :

$${}_m\mathrm{V}_x = 1 - \frac{\mathbf{a}_{x+m}}{\mathbf{a}_x}$$

$$\mathrm{P}_x = \frac{1}{\mathbf{a}_x} - d$$

$$d\mathbf{a}_n = 1 - v^n$$

on obtient :

$$(30)\quad \left\{ \begin{aligned} D_{(m)}(P_x) &= \frac{1}{2\,\mathbf{a}_x} \sum_{n=1}^{n=\infty} {}_{n-1}|\,q_{x+m}\,|\,\mathbf{a}_{x+m} - \mathbf{a}_{x+n}| = \\ &= \frac{\mathbf{a}_{x+m}}{\mathbf{a}_x}\, D(P_{x+m}). \end{aligned} \right.$$

**13.** — Il est facile de voir que l'on a :

$$(31)\qquad D(A_x) = d\,.\,D(\mathbf{a}_x)$$

$$(32)\qquad D(P_x) = \frac{D(A_x)}{1 - dA_x} = \frac{D(\mathbf{a}_x)}{\mathbf{a}_x}$$

### IV. — Nombre critique

**14.** — Le *nombre critique* ou *durée mathématique* de $\mathbf{a}_x$ est le plus grand entier $E(n)$ contenu dans la racine $n$ de l'équation

$$(33)\qquad \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_{\overline{n}|} = 0.$$

C'est parmi les valeurs possibles du nombre d'années de vigueur de l'opération considérée celle à laquelle ne correspond ni profit ni perte pour l'assureur.

**15.** — En multipliant l'équation (33) par $d = \frac{i}{1+i}$ et en ajoutant et retranchant l'unité, nous obtenons :

$$(34)\qquad (1 - d\mathbf{a}_x) - (1 - d\mathbf{a}_{\overline{n}|}) = 0.$$

Mais on a :

$$1 - d\mathbf{a}_x = A_x$$

$$1 - d\mathbf{a}_{\overline{n}|} = v^n$$

et l'équation (34) peut s'écrire :

$$(35)\qquad A_x - v^n = 0.$$



La racine $n$ de l'équation (33) est aussi racine de l'équation (35) : $A_x - v^n$ n'étant pas autre chose que le terme général de la somme $D(A_x)$, il en résulte que les nombres critiques relatifs à la rente viagère $\mathbf{a}_x$ et à l'assurance en cas de mort $A_x$ coïncident.

Si l'on suppose que l'assurance en cas de mort $A_x$ soit payable au moyen de primes annuelles $P_x$, le nombre critique $n$ se trouvera défini par l'équation :

$$(36)\qquad P_x\,\mathbf{a}_{\overline{n}|} - v^n = 0.$$

Mais les équations

$$\mathbf{a}_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{d}$$

$$P_x + d = \frac{1}{\mathbf{a}_x}$$

$$P_x\mathbf{a}_x = A_x$$

donnent immédiatement :

$$v^n(P_x + d) - P_x = 0$$

$$v^n - \mathbf{a}_x = A_x - v^n = 0$$

et on en déduit ce théorème : le nombre critique de l'assurance en cas de mort est le même, que les primes soient desp rimes uniques ou des primes annuelles constantes.

**16.** — Soit une assurance mixte $A_{x\overline{m}|}$ d'une durée $m$ contractée à l'âge $x$ : on peut la concevoir comme étant une assurance en cas de mort contractée au même âge par un individu pour lequel la loi de survie $l'_x$ serait définie par les égalités :

$$(37)\qquad l'_x = l_x,\ l'_{x+1} = l_{x+1} \ldots\ l'_{x+m-1} = l_{x+m-1},\ l'_{x+m} = 0.$$

Dans ce cas la valeur de la rente viagère temporaire de $m$ années ${}_m|\mathbf{a}_x$ est aussi identique à la valeur d'une rente viagère $\mathbf{a}'_x$ déterminée en partant de la loi de survie (37).

Si l'on pose :

$$A'_x = 1 - d\mathbf{a}'_x = 1 - d|_m\mathbf{a}_x = A_{x\overline{m}|}$$

le nombre critique de l'assurance mixte $A_{x\overline{m}|}$ ou de la rente temporaire ${}_{m|}\mathbf{a}_x$ pourra être déduit indifféremment de l'une ou de l'autre des équations

$$A_{x\overline{m}|} - v^n = 0$$

$$\mathbf{a}_{x\overline{m}|} - v^n = 0$$

lesquelles définissent des valeurs de $n$ indépendantes du mode de payement des primes.

### V. — Risque moyen des assurances concernant des personnes isolées

**17.** — Supposons que l'évènement auquel est surbordonné le payement de la somme assurée ne puisse avoir lieu qu'une seule fois au cours de la période d'assurance et soit $q_n$ la probabilité pour qu'il ait lieu dans la $n^e$ année.

La prime unique pure de l'opération est alors

$$E = \sum_{n=1}^{n=n} v^n q^n \tag{39}$$

et l'équation

$$\sum_{n=1}^{n=n} q_n (v^n - E)^2 = \{M(E)\}^2$$

définit le risque moyen M(E) de l'opération. En développant le carré du binôme $v^n - E$ et en tenant compte de l'équation (39), nous obtenons :

$$\{M(E)\}^2 = \sum_{n=1}^{n=n} q_n v^{2n} - 2E \sum_{n=1}^{n=n} q_n v^n + E^2 \Sigma q_n \tag{40}$$

$$\{M(E)\}^2 = E' - E^2$$



en posant :

$$\sum_{n=1}^{n=n} q_n = 1 \tag{41}$$

$$E' = \sum_{n=1}^{n=n} v^{2n} q_n.$$

On voit donc que dans le cas, défini par l'équation (41), où le payement de la somme assuré doit avoir lieu et une fois seulement, le carré du risque moyen de l'opération s'obtient en faisant la différence entre la valeur qu'aurait la prime unique de l'opération si le taux de l'escompte $v$ était remplacé par $v^2$ et le carré de la prime unique payée effectivement.

Pour le calcul effectif du risque moyen d'une assurance pour laquelle l'équation (41) est valable, il est donc nécessaire de dresser des tables de valeurs $C'_x$, $M'_x$. $A'_x$ ... différant des valeurs correspondantes $C_x$, $M_x$, $A_x$ ... par la substitution du taux

$$v' = \frac{1}{(1+i)^2}$$

au taux de l'escompte $v$.

**18.** — La relation (41) est évidemment satisfaite lorsqu'on a :

$$E \equiv A_x,\ E \equiv A_{x\overline{n}|},\ E \equiv v^n$$

(cas de l'assurance en cas de mort, de l'assurance mixte et de l'assurance à échéance fixe, avec des primes uniques).

On a :

$$M(A_x) = \sqrt{A'_x - A^2_x} \tag{42}$$

$$M(A_{x\overline{n}|}) = \sqrt{A'_{x\overline{n}|} - A^2_{x\overline{n}|}} \tag{43}$$

$$M(v^n) = \sqrt{v^{2n} - v^{2n}} = 0. \tag{44}$$

**19.** — Soit une assurance mixte $A_{x\overline{n}|}$ contractée moyennant le payement de primes annuelles constantes :

$$P_{x\overline{n}|} = \frac{A_{x\overline{n}|}}{a_{x\overline{n}|}} \frac{1}{a_{x\overline{n}|}} - d$$

et soit $M(P_{x\overline{n}|})$ le risque moyen qu'il s'agit de déterminer. On a :

$$\{M(P_{x\overline{n}|})\}^2 = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \alpha\,(v^\alpha - P_{x\overline{n}|}\, a_{\overline{\alpha}|})^2\, q_\alpha =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} q_\alpha \left\{ v^\alpha - \left(\frac{1}{a_{x\overline{n}|}} - d\right) \frac{1 - v^\alpha}{d} \right\}^2 =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} q_\alpha \left( (1 - \frac{1 - v^\alpha}{d\, a_{x\overline{n}|}} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{d^2\, a^2_{x\overline{n}|}} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} q_\alpha\, (d\, a_{x\overline{n}|} - 1 + v^\alpha)^2 =$$

$$= \frac{1}{\{1 - (1 - d\, a_{x\overline{n}|})\}^2} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} q_x\, (v^\alpha - A_{x\overline{n}|})^2 =$$

$$= \frac{1}{(1 - A_{x\overline{n}|})^2} \{M(A_{x\overline{n}|})\}^2$$

d'où :

(45) $$M(P_{x\overline{n}|}) = \frac{\sqrt{A'_{x\overline{n}|} - A^2_{x\overline{n}|}}}{1 - A_{x\overline{n}|}}$$

**20.** — Si l'on pose $x + n \geqslant \omega$, $A_{x\overline{n}|} = A_x$ et $P_{x\overline{n}|} = P_x$, on obtient donc pour le cas de l'assurance en cas de mort à prime annuelle constante $P_x$

(46) $$M(P_x) = \frac{\sqrt{A'_x - A^2_x}}{1 - A_x}.$$

**21.** — Le carré du risque moyen $M\left(\frac{v_x}{a_{x\overline{n}|}}\right)$ de l'assurance à



échéance fixe et à prime constante est donné de même par l'équation :

$$\left\{M\left(\frac{v^n}{a_{x\overline{n}|}}\right)\right\}^2 = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} q_\alpha \left(v^n - \frac{v^n}{a_{x\overline{n}|}} \frac{1 - v_\alpha}{d}\right)^2 =$$

$$= \frac{v^{2n}}{d^2\, a^2_{x\overline{n}|}} \sum q_\alpha\, (v^\alpha - A_{x\overline{n}|})^2 = v^{2n} \frac{\{M(A_{x\overline{n}|})\}^2}{(1 - A_{x\overline{n}|})^2}$$

d'où l'on déduit

(47) $$M\left(\frac{v^n}{a_{x\overline{n}|}}\right) = v^n \frac{M(A_{x\overline{n}|})}{1 - A_{x\overline{n}|}} = v^n\, M(P_{x\overline{n}|})$$

**22.** — Dans le cas des rentes temporaires ou viagères, l'équation (41) n'est pas satisfaite.

Mais on a dans ce cas :

$$a_{x\overline{n}|} = \frac{1 - A_{x\overline{n}|}}{d}$$

d'où

$$\{M(a_{x\overline{n}|})\}^2 = \frac{1}{d^2} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} q_\alpha\, (1 - A_{x\overline{n}|} - 1 + v^\alpha)^2 =$$

$$= \frac{1}{d^2} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} q_\alpha\, (v^\alpha - A_{x\overline{n}|})^2 = \frac{1}{d^2} \{M(A_{x\overline{n}|})\}^2$$

et

(48) $$M(a_{x\overline{n}|}) = \frac{1}{d} \sqrt{A'_{x\overline{n}|} - A^2_{x\overline{n}|}}.$$

Si l'on suppose $x + n \geqslant \omega$, on a le risque moyen de la rente viagère

$$M(a_x) = \frac{1}{d} \sqrt{A'_x - A^2_x}.$$

**23.** — Plaçons-nous toujours dans le cas des assurances à prime unique et soit une opération $E(x, n)$ contractée à l'âge $x$ et ayant

une durée $n$ (dans le cas $x + n > \omega$, on aura $E(x, n) \equiv E_x$) : le risque moyen $M_m(E_{x\overline{n}|})$ de cette opération après $m$ années est défini par l'équation

$$M_m(E_{x\overline{n}|}) = M(E_{x+m:\overline{n-m}|}) \quad (n > m) \tag{50}$$

Il n'en est plus de même pour les assurances à prime annuelle constante : pour ces dernières on a des relations analogues à la relation (30).

## VI. — Théorie de la stabilité

**24.** — Etant donné un ensemble d'opérations $\Gamma$, la balance des primes pures relative à $\Gamma$ comprend comme articles la valeur probable des capitaux assurés, et les primes futures de $\Gamma$ (capitaux et primes sont supposés rapportés au moment où l'on effectue la balance) et la différence entre ces deux valeurs est la *réserve des primes pures* : mais à côté de cette balance, on peut concevoir autant de balances distinctes qu'il y a de groupements possibles des décès futurs (Cf. § 2, n° 10) ; chacune de ces balances se traduit par une perte ou par un profit pour l'assureur suivant que l'hypothèse sur laquelle elle est basée donne lieu à un écart défavorable à l'assureur ou avantageux pour lui. L'hypothèse fondamentale, adoptée par nous, d'après laquelle il existe pour chacun des individus assurés une probabilité de décès déterminée, permet de déterminer la probabilité présentée par chacun des groupements possibles et, par suite, la probabilité pour que les profits (ou les pertes) correspondant à chaque groupement soient égaux aux profits (ou aux pertes) réels : cette probabilité est d'autant plus petite que la valeur absolue de l'écart entre les balances correspondantes et la balance des primes pures est plus grande.

Le risque moyen M d'un ensemble $\Gamma$ d'opérations présentant des risques moyens égaux à $M_1$, $M_2$, $M_3$ ... (risque défini par l'équation $M^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 + \ldots$) croît indéfiniment avec le nombre L des opérations composant $\Gamma$ : il en résulte évidemment que l'assureur qui n'encaisserait comme primes que les primes pures correspondant à une évaluation exacte de la mortalité et du taux de capitalisation, et qui n'ajouterait à ces primes que les chargements strictement suffisants pour couvrir les dépenses de l'exploitation, ne serait nullement garanti contre les conséquences financières de l'apparition d'évènements défavorables ; sa ruine serait certaine, comme la ruine de tout joueur qui prend part indéfiniment à un jeu équitable.



Il est d'ailleurs évident qu'il ne peut se couvrir complètement qu'en encaissant des primes assez fortes pour lui permettre de faire face aux hypothèses les plus défavorables pour lui ou, en d'autres termes, des primes qui lui permettent de constituer des réserves au moins égales à la valeur actuelle de ses engagements futurs, en supposant que l'échéance et le montant de ces engagements lui soient aussi défavorables que possible : mais il faut pour cela qu'il renonce à appliquer les procédés d'assurance et qu'il joue le rôle pur et simple d'une Caisse d'épargne.

On peut admettre au contraire (et c'est la seule méthode possible dans la pratique) que l'assureur, renonçant à atteindre une certitude absolue, se contente de parer aux seules éventualités qu'il juge possibles dans la pratique et qu'il augmente ses primes pures de ce qu'il faut pour pouvoir constituer un fonds de garantie neutralisant l'influence des écarts défavorables.

Soit P la prime pure et $\sigma$. P le chargement de la prime destiné à couvrir les augmentations éventuelles du risque (*chargement de risque*). On peut se proposer deux problèmes :

*a*) Déterminer $\sigma$ de manière qu'il y ait une probabilité donnée pour que les fonds recueillis par l'assureur suffisent à couvrir les risques futurs.

*b*) Déterminer cette dernière probabilité lorsque $\sigma$ est donné.

Les théorèmes de Tchebycheff-Pizzetti et de Bernoulli nous

apprennent qu'il existe une probalité

$$P > 1 - \frac{1}{\lambda^2}$$

ou

$$\Phi\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{\sigma}^{\frac{\lambda}{\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt$$

pour que les écarts qui se présentent effectivement dans les désastres ne surpassent pas le multiple $\lambda$ du risque moyen. Supposons qu'on ait réuni un très grand nombre d'opérations : on peut alors prendre pour P la valeur $\Phi$ et si on suppose $\lambda = 3$, la probabilité

$$1 - P = 1 - \Phi\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}00271$$

pour qu'il y ait des écarts supérieurs en valeur absolue au triple de l'erreur moyenne est si voisine de zéro qu'on peut, dans la pratique, la considérer comme négligeable.

Le triple du risque moyen peut donc être considéré comme l'écart maximum pratiquement possible.

**25.** — Supposons que toutes les quantités introduites se rapportent à l'intervalle de temps $(t_1, t_2)$ et que leurs valeurs soient évaluées en les supposant escomptées à l'époque $t$.

Représentons par $E'_n$ le montant des primes et des chargements de risque qui seront encaissés par l'assureur dans l'hypothèse d'un groupement donné $(n)$ des décès futurs et formons, comme précédemment, les différences $A_n - E'_n$ correspondant à tous les groupements possibles : on trouve tout d'abord que si l'on désigne par $\varphi(n)$ la probabilité du groupement $n$ et si l'on a

$$\Sigma \varphi(n) = 1$$

la valeur probable

$$\Sigma \varphi(n)(A_n - E'_n)$$



de la différence $(A_n - E'_n)$ est aussi égale, en vertu de l'équation $E'_n = (1 + \sigma) E_n$ à

$$\sigma \Sigma \varphi(n) E_n = \sigma E$$

si E désigne la valeur probable des primes nettes que l'assureur doit encaisser pendant la période $(t_1, t_2)$.

Appelons *risque moyen brut* M' l'écart moyen entre la différence $A_n - E_n$ et la quantité $\sigma E$, c'est-à-dire la quantité M' définie par l'équation

$$\{ M' \}^2 = \Sigma \varphi(n) \{ \sigma E - (A_n - E_n) \}^2.$$

Les considérations du paragraphe précédent permettent alors d'assigner la valeur $\lambda M'$ à la plus grande des pertes possibles provenant pour l'assureur d'écarts dans la mortalité ($\lambda$ est un nombre positif, 3 par ex.) : par suite, si on désigne par V la réserve des primes pures existant à l'époque $t$ et si l'on tient compte de la valeur probable $\sigma E$ des chargements de risque établis sur les primes, on trouve que le capital nécessaire pour faire face aux sinistres futurs est compris entre les limites

$$V - \lambda M' - \sigma E, \quad V + \lambda M' - \sigma E.$$

Nous appellerons ;

*Réserve de risque* de l'ensemble $\Gamma$ à l'époque $t$ et pour la période $(t_1, t_2)$ la quantité $R = \lambda M' - \sigma E$ ;

*Balance de risque* d'une balance dans laquelle on oppose à l'écart maximum possible $\lambda M$ les chargements de risque futurs établis sur les primes.

Une compagnie d'assurance est dite *stable* si l'on a

$$R \leqslant 0.$$

**26.** — La définition précédente de la réserve de risque suppose qu'il n'existe pas d'autres fonds de garantie que ceux qui proviennent de la réserve des primes nettes et elle suppose en outre

qu'on a choisi des taux, des coefficients de mortalité et des chargements sur les primes (outre le chargement $\sigma$ E) égaux respectivement au taux réel de la capitalisation, à la mortalité effective des assurés et aux dépenses effectives de l'assureur.

Si on admet au contraire (comme cela a lieu dans la réalité) qu'il y a dans l'entreprise d'assurances une source de revenus provenant d'une évaluation des éléments précédents assez large pour laisser un profit à l'assureur et si on admet l'existence de fonds extraordinaires de réserve, la condition de stabilité énoncée plus haut se ramène à la suivante : il faut que la différence entre le multiple $\lambda M'$ du risque brut moyen $M'$ d'une part et la somme $\sigma E$ des profits rappelés plus haut et des réserves extraordinaires d'autre part ne soit pas un nombre positif.

Enfin au risque moyen brut $M'$ on substitue le risque moyen net M quand les profits rappelés plus haut et les fonds extraordinaires de réserve sont seuls destinés à couvrir les aggravations éventuelles du risque, c'est-à-dire quand il n'y a pas les chargements sur les primes, que nous avons définis précédemment et que nous avons supposés exister.

Il est évident que les diverses définitions de la réserve de risque peuvent être considérées en substance comme identiques.

**27.** — Soit R la réserve de risque existant en réalité dans une compagnie d'assurances, de sorte que l'on a

$$R \lesseqgtr 0$$

et soit $\lambda$ la valeur de la quantité $\lambda$ définie plus haut qui correspond à cette réserve.

Soit de même $\lambda'$ la valeur de $\lambda$ qui correspond à la valeur zéro de la réserve de risque. Le quetient

$$N = \frac{\lambda'}{\lambda}$$



est pris par M. Radtke comme mesure du degré de stabilité d'une compagnie d'assurances.

Selon que l'on a

$$R = 0, \quad R < 0 \text{ ou } R > 0.$$

on a aussi

$$N = 1, \quad N > 1 \text{ ou } N < 1 :$$

le degré de stabilité est d'autant plus grand que la réserve de risque est plus grande en valeur absolue, cette réserve étant supposée exprimée par un nombre négatif.

De la définition

$$R = \lambda M' - \sigma E$$

il ressort d'une façon évidente qu'à égalité des autres éléments et par suite pour une même valeur de $\lambda$, la réserve R sera d'autant plus petite que le rapport du risque M au montant total des capitaux assurés ou des primes E est lui-même plus petit.

Ceci montre le lien étroit qui relie les conditions de maximum ou de minimum du risque moyen relatif au degré de stabilité plus ou moins grand de la Compagnie d'assurances.

Le théorème énoncé au § 1, d'après lequel le risque moyen relatif est minimum quand les conditions de participation au jeu des divers joueurs sont identiques, prend, par exemple, dans le cas actuel la forme suivante : toutes choses égales d'ailleurs, la réserve de risque est minimum et, par suite, le degré de stabilité est maximum quand les sommes assurées par les divers individus sont égales (en supposant toutes de même nature les opérations d'assurances qui composent l'ensemble considéré $\Gamma$).

Les considérations du n° 9 peuvent s'étendre d'une façon analogue au cas actuel.

Soit N le degré de stabilité d'un groupe déterminé d'opérations, S le montant d'une nouvelle opération qui vient s'adjoindre au groupe précédent, N' le degré de stabilité du nouveau groupe résultant de cette adjonction.

On appelle *somme assurable maximum* $S_0$ la valeur de S qui vérifie l'équation

$$N = N'. \tag{52}$$

On voit de suite que la relation (52) coïncide avec l'équation qui exprime l'égalité du risque moyen relatif au groupe primitif et du risque moyen relatif au groupe résultant.

**28.** — Supposons que l'ensemble Γ soit formé comme précédemment de L opérations semblables entre elles ; soient $s$, P et $M'_1$ le capital assuré, la prime unitaire et le risque moyen de chacune des L opérations : la réserve de risque pourra s'écrire

$$R = \lambda s M'_1 \sqrt{L} - \sigma s P L$$

car on a :

$$\begin{aligned} M' &= s M'_1 \sqrt{L} \\ E &= L P s \end{aligned} \tag{53}$$

et si l'on représente les produits $\lambda s M'_1$ et $\sigma s P$ respectivement par $a$ et $b$, qui seront ainsi des coefficients positifs et différents de zéro, la réserve peut s'écrire

$$R = a\sqrt{L} - bL. \tag{53'}$$

On voit de suite qu'aux valeurs o et ∞ de L correspondent respectivement les valeurs o et — ∞ de R et qu'à des valeurs de L inférieures à

$$\frac{a^2}{b^2} \text{ ou } \frac{\lambda^2 M_1'^2}{\sigma^2 P^2}$$

correspondent des valeurs positives de R. A la valeur

$$L_0 = \frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{\lambda}{\sigma}\frac{M'_1}{P}\right)^2 \tag{54}$$

de L correspond au contraire une réserve de risque égale à zéro : la valeur (54) de L représente donc le nombre d'assurés au-dessous duquel la condition de stabilité n'est plus satisfaite (*nombre minimum des assurés*).



A $L > L_0$ correspondent des valeurs positives de R : les relations

$$\frac{dR}{dL} = \frac{1}{2} a \frac{1}{\sqrt{L}} - b = 0$$

$$\frac{d^2R}{dL^2} = -\frac{a}{4L\sqrt{L}}$$

montrent d'ailleurs que R est maximum pour

$$L = \frac{1}{4}\frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{4} L_0. \tag{55}$$

Si les opérations composant l'ensemble Γ ont des montants égaux respectivement à $s_1, s_2, \ldots s_L$, on aura des relations qui différeront de celles considérées jusqu'ici en ce qu'on devra remplacer LP par la somme des primes et $sM'_1\sqrt{L}$ par

$$M'_1\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + \ldots\ldots s_L^2}.$$

Si les différentes opérations ont des montants à peu près égaux, il suffira de poser, dans les équations (53) et (53') :

$$s = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_L}{n}.$$

**29.** — Enfin si l'on pose

$$\lambda s M'_1 \sqrt{L_0} - \sigma s P L_0 = 0$$

$$\lambda' s M'_2 \sqrt{L} - \sigma s P L = 0$$

on a :

$$N = \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\sigma s P L}{s M'_1 \sqrt{L}} \frac{s M'_1 \sqrt{L_0}}{\sigma s P L_0} = \sqrt{\frac{L}{L_0}}.$$

Le degré de stabilité est donc directement proportionnel à la racine carrée du nombre des assurés et inversement proportionnel à la racine carrée du nombre minimum L des assurés.

M. Radtke remarque à juste titre que, en introduisant cette notion

de nombre minimum des assurés, on obtient une règle permettant de juger des conditions financières d'une Compagnie d'assurances, par suite de l'équivalence de ces deux expressions « une Compagnie d'assurances est stable » et « une Compagnie d'assurances a atteint le nombre minimum des assurés » et de plus on peut caractériser d'une façon assez concise le degré de hasard ou de risque présenté par une forme donnée d'assurance : il est en effet manifeste qu'une forme d'assurance est d'autant plus aléatoire que le nombre minimum des assurés correspondant à cette forme est plus grand [1].

**30.** — C'est à M. Bohlmann qu'on doit d'avoir relié la notion de nombre minimum des assurés à la théorie de la stabilité, mais la remarque suivante de M. Landré montre immédiatement que l'assurance ne peut avoir lieu pour un nombre d'assurés très limité.

Pour un individu âgé de 30 ans, la probabilité de décès dans un délai d'un an est d'environ 2 %. Si l'on suppose cinquante assurés en cas de mort agés de 30 ans, on voit qu'un seul décès en plus du décès unique prévu double la mortalité supposée : au contraire pour un groupe de 500 assurés, la mortalité se trouverait simplement augmentée de $\frac{1}{10}$.

C'est précisément ce nombre de 500 qu'on considère dans la pratique comme la limite inférieure extrême au-dessous de laquelle la prudence interdit de descendre.

Des remarques faites précédemment montrent d'une façon trop évidente pour qu'il soit nécessaire d'insister sur ce point, qu'en réalité il n'existe pas un minimum absolu indépendant de l'opération considérée et du degré de certitude qu'on veut atteindre.

[1] Radtke. — *Die Stabilität der Lebensversicherungsanstalten*, Berlin, 1903, page 36.

## Table des valeurs de l'intégrale

$$\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2}\, dt$$

| $\gamma$ | $\Phi(\gamma)$ | $\gamma$ | $\Phi(\gamma)$ |
|---|---|---|---|
| 0,0 | 0.0000000 | 2,6 | 0.9997640 |
| 0,1 | 1124630 | 2,7 | 9998657 |
| 0,2 | 2227025 | 2,8 | 9999250 |
| 0,3 | 3286267 | 2,9 | 9999589 |
| 0,4 | 4283922 | 3,0 | 9999779 |
| 0,5 | 5204999 | 3,1 | 9999884 |
| 0,6 | 6038561 | 3,2 | 9999940 |
| 0,7 | 6778010 | 3,3 | 9999969 |
| 0,8 | 7421010 | 3,4 | 9999985 |
| 0,9 | 7969082 | 3,5 | 999999256 91 |
| 1,0 | 8427008 | 3,6 | 9999996 4414 |
| 1,1 | 8802050 | 3,7 | 99999983285 |
| 1,2 | 9103140 | 3,8 | 99999992200 |
| 1,3 | 9340080 | 3,9 | 99999996522 |
| 1,4 | 9522851 | 4,0 | 99999998459 |
| 1,5 | 9661052 | 4,1 | 999999993 30 |
| 1,6 | 9763484 | 4,2 | 9999999971 3 |
| 1,7 | 9837904 | 4,3 | 99999999880 |
| 1,8 | 9890905 | 4,4 | 999999999 51 |
| 1,9 | 9927904 | 4,5 | 9999999968 1 |
| 2,0 | 9953223 | 4,6 | 99999999992 |
| 2,1 | 9970205 | 4,7 | 99999999997 |
| 2,2 | 9981372 | 4,8 | 99999999999 |
| 2,3 | 9988568 | | |
| 2,4 | 9993115 | | |
| 2,5 | 9995930 | | |

## ERRATUM

—

Page 116 : formule (75), 3e ligne de la formule,

*Au lieu de* $+3(u_{x-7}+u_{x+7})$, *lire* $-3(u_{x-7}+u_{x+7})$.

6e ligne de la même formule,

*Au lieu de* $+0{,}12(u_{x-7}+u_{x+7})$, *lire* $-12(u_{x-7}+u_{x+7})$

Page 120 : formule (84), 4e ligne de la formule,

*Au lieu de* $+0{,}0144(u_{x-7}+u_{x+7})$, *lire* $-0{,}0144(u_{x-7}+u_{x+7})$.

---

# TABLE DES MATIÈRES


Pages

Préface de l'auteur . . . . . V

Préface de M. Achard . . . . . VII

Introduction. — *Problème fondamental*. . . . . I

## PREMIÈRE PARTIE

**Fondements mathématiques et statistiques de la théorie.**

Chapitre premier. — *Eléments du calcul des probabilités* . . . . . 11

§ I. Définitions et principes fondamentaux. — § II. Valeur la plus probable. Valeur probable. Erreur moyenne. — § III. Théorème de Tchebycheff-Pizzetti. — § IV. Cas particulier : Théorèmes de Bernoulli et de Poisson. — V. Loi de Gauss. Méthode des moindres carrés. — § VI. Expression approchée de $\frac{s!}{\alpha!\,(s-\alpha)!}\,p^{\alpha}q^{s-\alpha}$. — Note sur le calcul de certaines intégrales définies et sur la formule de Sterling.

Chapitre II. — *Théorie statistique de la mortalité* . . . . . 55

§ I. Axiomes et fonctions fondamentales. — § II. Probabilités de décès et de survie. — § III. Tables de survie. — § IV. Théorie formelle de la population. — § V. Application de cette théorie à la mortalité. Méthode géométrique. — § VI. Méthode analytique. Algorithme de Knapp. — § VII. Probabilité de décès dans les groupes ouverts. — § VIII. Introduction de nouvelles fonctions biométriques. — § IX. Mortalité de groupes spéciaux. — § X. Probabilité de décès dans les groupes choisis. — § Ajustement des tables de survie. — § XII. Ajustement analytique : I. Lois de

Pages

survie, théorème de M. Quiquet. — § XIII. Ajustement analytique : II. Ajustement selon la loi de Gompertz-Makeham. — § XIV. Ajustement mécanique. — § XV. Ajustement graphique. § XVI. Relevé des données statistiques. — § XVII. Aperçu sur quelques tables de mortalité de groupes assurés. — § XVIII. Légitimité de l'existence d'une probabilité de décès : Théorie de la dispersion.

CHAPITRE III. — *Démonstration de quelques formules relatives aux opérations financières* . . . . . 140

§ I. — Intérêts et escomptes. — § II. Payements périodiques.

## DEUXIÈME PARTIE

### Problèmes fondamentaux de la théorie mathématique des assurances sur la vie.

CHAPITRE PREMIER. — *Méthodes usuelles de calcul.* . . . . . 153

§ I. Observations préliminaires. — § II. Détermination des probabilités fondamentales. — § III. Tables de commutation. — § IV. Application des lois de Gompertz et de Makeham; règle de Simpson.

CHAPITRE II. — *Détermination de la valeur des principales formes d'assurances sur la vie* . . . . . 178

§ I. **Capitaux différés.** — n. 1. Cas d'une tête unique. — n. 2. Cas de plusieurs têtes. — § II. **Rentes viagères.** — n. 3. Définition. — n. 4. Formules de récurrence. — n. 5. Rentes viagères temporaires, différées, à la fois temporaires et différées. — n. 6. Rentes viagères, dont le montant varie linéairement. — n. 7. Rentes viagères anticipées. — n. 8. Rentes fractionnées : méthode d'interpolation. Rente continue. — n. 9. Rentes fractionnées, temporaires et différées. — n. 10. Rentes fractionnées : détermination à l'aide de l'hypothèse de De Moivre. — n. 11. Rentes fractionnées : cas de deux têtes. — n. 12-13. Emploi de la formule de sommation d'Euler. — n. 14. Rente continue définie par la loi de Makeham : sa réduction à des fonctions Γ et à des



Pages

séries hypergéométriques. — n. 15. Relation entre la rente viagère et la vie moyenne. — n. 16. Rentes viagères complètes. — n. 17. Détermination des rentes viagères complètes, en supposant que tous les décès ont lieu au milieu de l'année. — n. 18. Même problème en supposant une répartition uniforme des décès dans le cours d'une année. — § III. **Assurances en cas de mort.** — n. 19. Cas d'une tête unique. — n. 20. Cas des groupes. — n. 21. Assurances temporaires, différées, à la fois temporaires et différées. — n. 22. Assurances mixtes. — n. 23. Assurances à montant linéairement variable. — n. 24. Assurances payables à la fin de la fraction $\frac{1}{m}$ de l'année du décès. — Assurances continues en cas de mort. — n. 25. Expressions de ces dernières par des intégrales définies. — n. 26. Extension au cas des groupes. — § IV. **Rentes réversibles.** — **Capital payable au** $r^{\text{ème}}$ **décès d'un groupe.** — n. 27. Rentes payables tant que $r$ têtes au moins vivent dans le groupe de $m$ têtes. — n. 28. Rentes payables tant que $r$ têtes exactement vivent dans le groupe. — n. 29. Capital payable au moment du $r^{e}$ décès. — n. 30. Cas de deux têtes. — n. 31. Cas de trois têtes. — n. 32. Réduction des divers cas à un type unique. — § IV. **Rentes et capitaux de survie.** — n. 33. Rentes de survie pour le cas de deux têtes. — n. 34. Leur expression au moyen d'intégrales définies. — n. 35. Rente fractionnée et rente complète de survie pour le cas de deux têtes. — n. 36. Rentes de survie pour le cas de trois têtes. — n. 37. Leur expression au moyen d'intégrales définies. — n. 38. Capitaux de survie : cas de deux têtes. — n. 39. Capitaux de survie : relations entre les divers capitaux possibles pour le cas de deux têtes. — n. 40. Capitaux de survie : cas de trois têtes. — n. 41-42. Expressions des capitaux de survie au moyen d'intégrales définies. — n. 43. Capitaux de survie : leur expression lorsque la loi de survie est la loi de Makeham. — n. 44. Cas où la loi de survie est celle de Gompertz. — n. 45. Extension au cas d'un nombre quelconque de têtes.

## TROISIÈME PARTIE

### Technique des assurances sur la vie.

CHAPITRE PREMIER. — *Primes et réserves* . . . . . 227

§ I. Notion de prime. Primes pures et primes du tarif. — § II. Primes uniques et primes périodiques. Primes de contre-

Pages

assurances. — § III. Définition des réserves. Réserves négatives. — § IV. Constitution des réserves. Primes de risque et primes d'épargne. — § V. Exemple de détermination rétrospective de la réserve. — VI. Groupement des polices. Méthode de récurrence pour la détermination des réserves. — § VII. Réserves des primes autres que les primes pures. Primes et réserves de Zillmer. — § VIII. Attribution de la réserve à chaque assuré. Résiliation et réduction des assurances.

CHAPITRE II. — *Des profits* . . . . . 253

§ I. Comptes de profits et pertes. — § II. Du profit de mortalité. — § III. Du profit de capitalisation. — § IV. Participation des assurés aux bénéfices.

## QUATRIÈME PARTIE

### Théorie du risque.

CHAPITRE UNIQUE. . . . . 267

§ I. Définitions et principes fondamentaux. — § II. Notion de risque dans le cas particulier des assurances sur la vie. — § III. Risque mathématique d'une rente viagère et d'un capital en cas de mort. — § IV. Nombre critique. — § V. Risque moyen des assurances. — § VI. Théorie de la stabilité.

Table des valeurs de l'intégrale $\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt$ . . . . . 301

---

*VIENT DE PARAITRE :*

**VINTÉJOUX** (F.)

Professeur honoraire de Mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis, ancien membre du Conseil supérieur de l'Instruction publique

# NOUVELLES TABLES

## D'INTÉRÊTS COMPOSÉS ET D'ANNUITÉS

PRÉCÉDÉES D'UN

**Précis théorique des opérations financières à long terme, particulièrement des emprunts**

Cet ouvrage est destiné aux personnes qui ont à s'occuper de questions financières ; il s'adresse aussi aux élèves des écoles supérieures de commerce.

La première partie renferme :

1° *La théorie des intérêts composés et des annuités.* Solution algébrique des principales questions qu'on y rencontre : valeur acquise, valeur actuelle ou escompte à intérêts composés, détermination des divers éléments du calcul ; divers modes de capitalisation, capitalisation continue ; annuités immédiates, différées, constantes ou variables ; amortissement ; problèmes fondamentaux des assurances sur la vie.

2° *L'usage des Tables contenues dans l'ouvrage pour la solution pratique des mêmes problèmes.* Exemples numériques destinés à montrer comment on peut résoudre les questions précédentes par le simple emploi des tables ; approximation des résultats.

3° *La théorie des emprunts.* Formes diverses d'emprunts ; rente perpétuelle, obligations de divers types, valeurs à lots, actions, etc... Modèles de tableaux d'amortissement. Parités.

La IIe partie contient six tables :

I. *Valeur acquise par 1 fr. placé à intérêts composés pendant N un. de temps.*

II. *Valeur actuelle de 1 fr. payable à une époque déterminée.*

III. Valeur acquise par des placements de 1 fr. effectués au commencement de chaque unité de temps pendant *n* unités ;

IV. *Valeur actuelle de N annuités de 1 fr.*

V. *Annuité qui amortit un capital de 1 fr. en N unités de temps.*

(Dans ces cinq tables, le taux varie de 1/8 °/₀ à partir de 1/4 °/₀ pour tous les taux usuels).

VI. *Tables de mortalité* usitées dans les calculs d'assurance sur la vie en France et à l'étranger.

PRIX : { Broché. . . . . **10 fr.**
Relié. . . . . **12 fr.**

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN
6, RUE DE LA SORBONNE, 6, PARIS

**Commandant BAZERIES**

# Table chiffrante et déchiffrante

In-12, Paris 1893, toile, **7** fr. **50**

Augmenté d'un **ANNEXE** contenant 200 mots de convention et d'une **MÉTHODE** pour transformer le chiffre Bazeries en chiffre secret.

**W. ROUSE BALL**

# HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

*Traduction Freund*

2 volumes grand in-8°

**TOME I (De l'Antiquité à Huygens)**

PRIX : **12** francs

**TOME II (De Newton aux temps modernes)**

*Revu et complète par*

F. DE MONTESSUS

Professeur à l'Université libre de Lille, Lauréat de l'Institut

(*Sous Presse*)

Saint-Amand (Cher). — Imprimerie BUSSIÈRE

COLUMBIA UNIVERSITY LIBRARIES

This book is due on the date indicated below, or at the expiration of a definite period after the date of borrowing, as provided by the rules of the Library or by special arrangement with the Librarian in charge.

| DATE BORROWED | DATE DUE | DATE BORROWED | DATE DUE |
|---|---|---|---|
| | | | |

CZ8(1140)M100

MSA: 04/91 NEH

D835 B78

Broggi
Traite des assurances sur la
Vie

COLUMBIA UNIVERSITY LIBRARIES
0041437500

END OF
TITLE